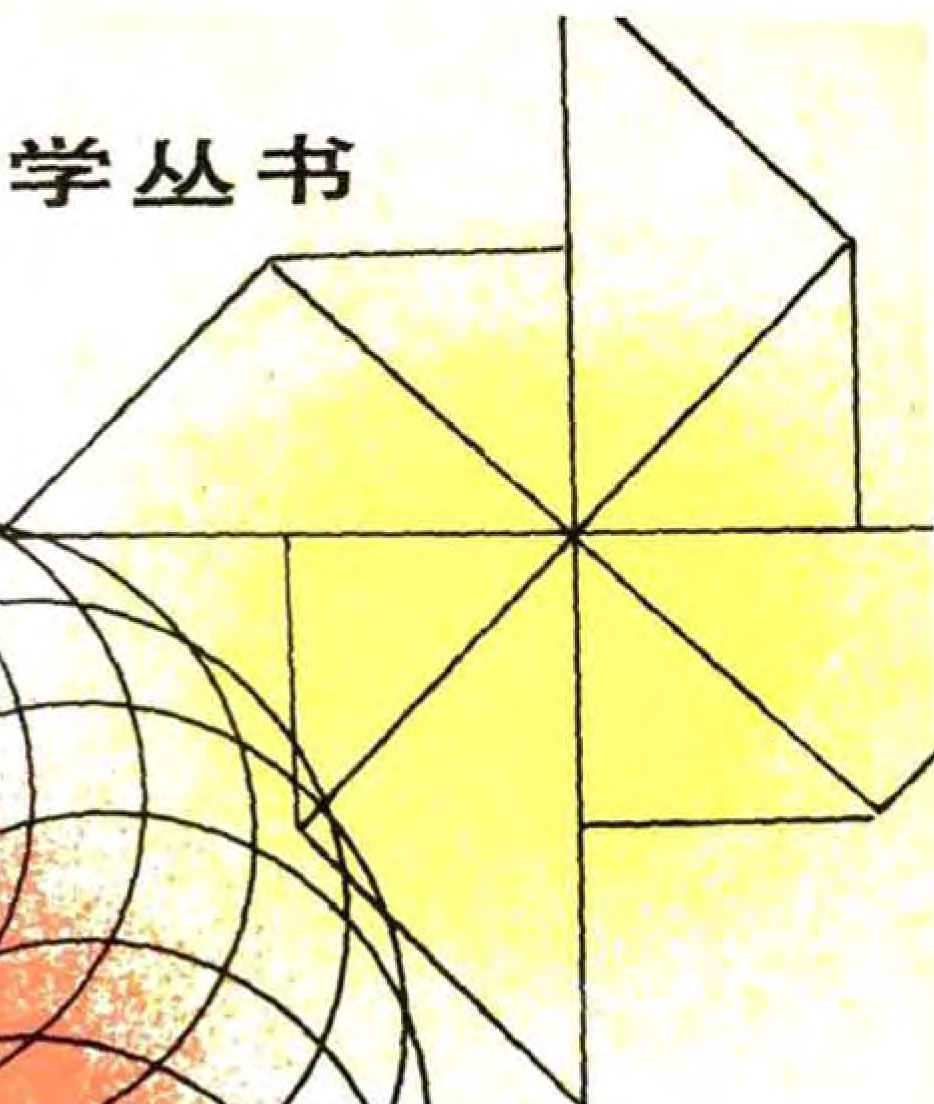
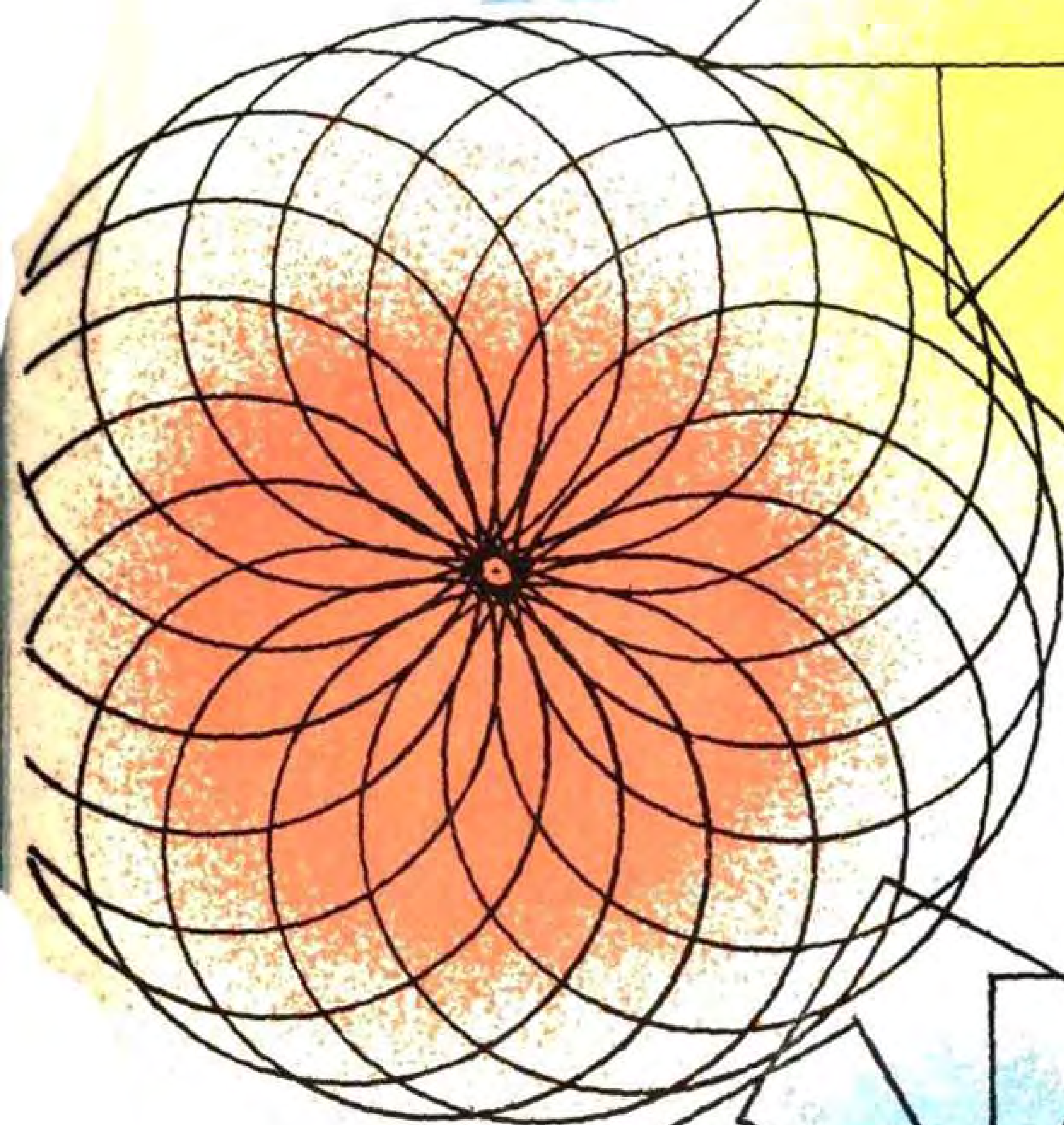
日本中学生数学丛书

11







空间与坐标

日本中学生数学丛书(11)

空间与坐标

[日] 平冈 忠 著

王家彦 译 马忠林 校

吉林人民出版社

内 容 介 绍

本书是根据日本横地 清编"中学生的数学"⑪平罔 忠著"空间与坐标"一书译出。书中内容概括为三部分：第一部分是从史的角度概述几何学的产生和发展；第二部分是笛卡尔的坐标几何；第三部分是图形的变换。本书通过中学生能看懂的素材，通俗的阐述了数学的发生发展以及怎样学习和研究的思想方法，对中学生来说是一本较好的课外参考书。

日本中学生数学丛书(11)

空 间 与 坐 标

(日)平冈忠 著

王家彦 译 马忠林 审校

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 4印张 67,000字

1981年7月第1版 1981年7月第1次印刷

印数：1—10,090

书号：13091·60 定价：0.53元

出 版 说 明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版了由日本山梨大学教授横地　清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

参加这套丛书翻译工作的共有十二名同志，并由吉林师大数学系马忠林同志审校。这套丛书将从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社　一九八〇年五月

目　　录

第Ⅰ章　几何学的产生和发展

§1　几何学的起源 …………………………… 1
（1）　古代的数学 …………………………… 1
（2）　几何学的产生 …………………………… 3
§2　希腊以及亚历山大时代的几何学 ………… 4
（1）　希腊的几何学 …………………………… 4
（2）　亚历山大时代的几何学 ………………… 9
§3　欧几里德几何学的诞生 ………………… 11
（1）　欧几里德的『几何学原本』 ……………… 11
（2）　平行线公设 …………………………… 14
§4　非欧几里德几何学的发现 ……………… 15
（1）　罗巴切夫斯基—波里埃的
　　　非欧几里德几何学 ……………………… 15
（2）　黎曼的非欧几里德几何学 ……………… 17

第Ⅱ章　空间和图形

§1　从物体的形到图形 …… 19

§2　空间 …… 20

§3　研究空间和图形的方法 …… 22

（1）　欧几里德学派的方法 …… 22

（2）　利用坐标的方法 …… 24

（3）　利用向量的方法 …… 24

（4）　利用变换的方法 …… 25

§4　空间的性质（Ⅰ） …… 25

（1）　在空间中存在什么 …… 25

（2）　空间具有什么性质 …… 26

§5　空间的性质（Ⅱ） …… 30

（1）　现实空间是欧几里德空间? …… 30

（2）　希尔伯特的『几何学基础』 …… 30

§6　图形的性质 …… 36

第Ⅲ章　坐标的几何学

§1　图形与数式的统一 …… 38

（1）　笛卡尔的思想 …… 38

（2） 图形与数式的统一 …………………… 39
§2 坐标 …………………… 41
（1） 直线上点的坐标 …………………… 41
（2） 平面上点的坐标 …………………… 48
§3 平面上的直线 …………………… 55
（1） 平面上的直线方程 …………………… 55
（2） 直线的位置关系 …………………… 61
§4 以直线为边界的平面区域 …………………… 66
（1） 分数大小的比较 …………………… 66
（2） 以直线为边界的区域 …………………… 69
§5 圆 …………………… 74
（1） 圆的方程 …………………… 75
（2） 圆与直线的交点 …………………… 78
（3） 圆的切线 …………………… 79

第Ⅳ章 向量

§1 向量 …………………… 82
（1） 向量 …………………… 82
（2） 向量图 …………………… 84
§2 向量的分量 …………………… 89
（1） 向量的分量 …………………… 89

（2） 分量表示 …………………………… 91
§3 向量的内积 …………………………… 94
（1） 向量的内积 …………………………… 94
（2） 向量的内积在图形上的表现 …………… 96

第Ⅴ章 图形的生成

§1 由运动所产生的图形 …………………… 98
（1） 移动 …………………………………… 98
（2） 由运动所产生的图形 ……………… 100
§2 作为点的轨迹的图形 …………………… 101
（1） 轨迹 …………………………………… 102
（2） 作为点的轨迹的直线和圆 …………… 104
（3） 作为点的轨迹的曲线 ……………… 106
§3 函数的象的图形 ………………………… 108
（1） 关于图形的函数关系 ……………… 108
（2） 由变换所作成的图形 ……………… 110
［后记］

第Ⅰ章　几何学的产生和发展

§1　几何学的起源

（1）　古代的数学

我们很难确切地了解数学是什么时候产生的，但是产生数学的基础是，古代人类数物体的个数以及计算等等而考虑到必要的数的概念。

在古代，文化开化较早的国家应当提出的如埃及、巴比伦（米索波达米亚地方）、中国、印度等，在这些国家中数学也还是很发达。如从图1～图3可以看到，它们所在的地区都是大河流域。因为大河的流域，地势平坦而且水陆交通方便、土地肥沃，适于人类居住，尤其适宜于农业生产。

人类为了生活从事农业生产，为了确定播种和收获农作物的时间，需要历法和天文，又为了计算农业、狩猎和渔业所得的数量以及物资交换，尤其是测定耕地和土地的面积和建筑等而需要测量。

从这些事实可想而知在数学中，历法、天文学、数与计算以及测量学很早就发展起来。

在埃及以及巴比伦，大约在纪元400～500年时已有历法。那时据说在埃及，已把一年定为365日，而在巴比伦，一年定为360日。这样在巴比伦把一年用一个圆周来表示，把圆周象图4那样，用半径长来截，能将圆周六等分，每一等分代表60日，而产生60进位法的思想，现在在表示时间以及角度时仍在使用。在巴比伦，表示数时也曾用60进位法。

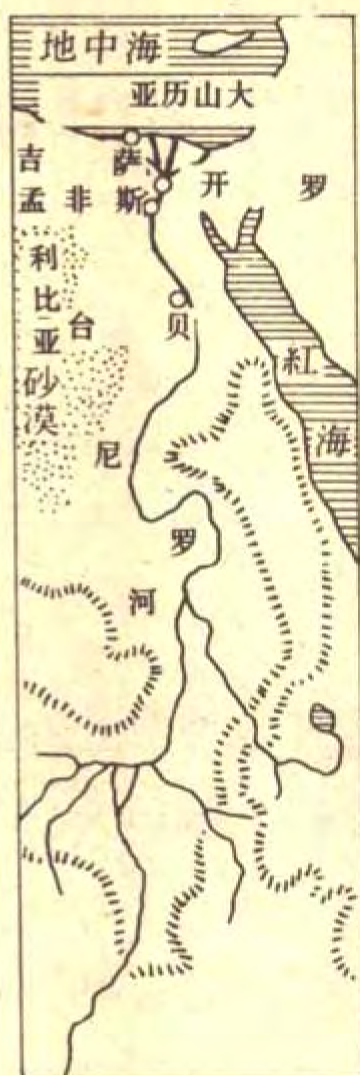


图1　埃及地方



图2　巴比伦地方



图3　中国地方

（2） 几何学的产生

埃及的尼罗河每年雨季，河水泛滥，而且从上游冲来大

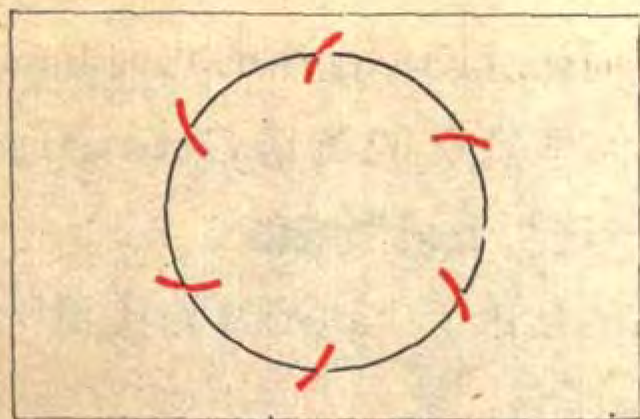


图 4　圆周用半径来截

量泥砂。这些泥砂冲毁耕地的地界，居民为了预知泛滥时间，历法是必要的，并且为了重新恢复泛滥前的地界，还必须进行土地测量。



图 5　埃及的测量

在当时，人们主要是利用绳子来测量土地，利用太阳的阴影定出东西和南北的方向，以确定地点的位置。

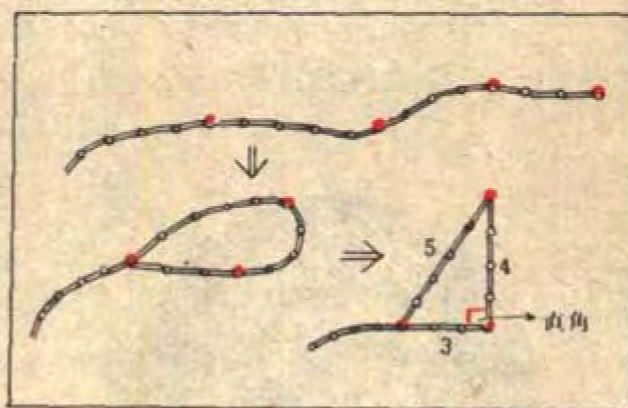


图 6　用 3 ： 4 ： 5 的长度作直角

又如图6，以长度为3，4，5的比的绳索所张成的三角形则得到一个直角，被后来叫作毕达哥拉斯定理（三平方定理）（勾股定理），这时由实践已经知道了。

著名的吉萨的金字塔大约是在公元前270年修建的，到现在已有两千二百多年，它说明了当时测量以及天文的发展的实例之一。

这样从埃及的土地测量，进而研究图形性质的几何学的学问已经开始萌芽。作为具有几何学意义的英语Geometry是由土地（geo）测量（metria)这两个词形成的。

象上面所说过的，几何学大致是由于土地测量的实用所产生的。



图7 希腊以及亚历山大地方

§2 希腊以及亚历山大时代的几何学

（1） 希腊的几何学

〖希腊的数学家〗在气候好并且无天灾之忧的希腊，人们承认自然的合理性，对事物的观点和思想方法的合理性和可知性，也引起重视。喜欢钻研学问和武术，把由埃及以及巴比伦所产生的实用知识作理论上的发展。


图8 托列斯

在希腊的数学家中，首先应提到希腊数学的祖师的希腊七贤之一的**托列斯**（B. C.640～546）。他在埃及学习数学，他测定了金字塔的高度（图9）、测定了从海岸到船只的距离（图10）曾使当时人们感到震惊。

但是，托列斯的业绩中最伟大的是，他首先把由经验得知的事实，给出逻辑的**证明**。例如，从图11中所给出的事实

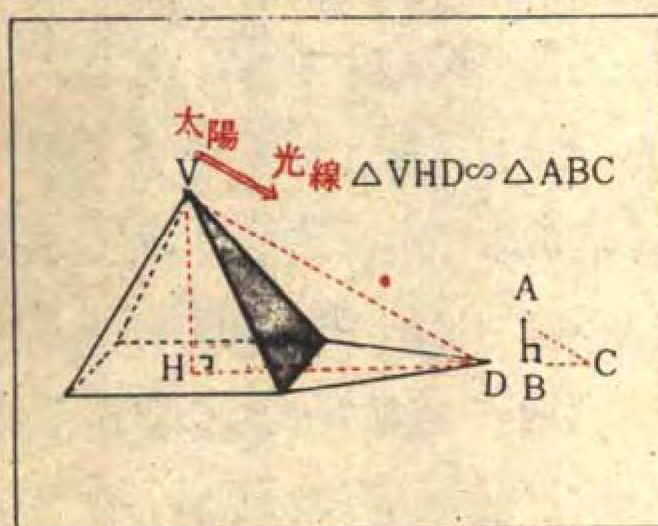


图 9　利用相似三角形测定金字塔的高度

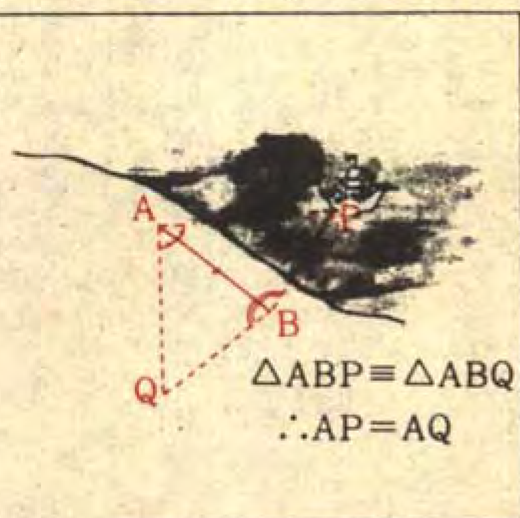


图 10　利用三角形合同测定距离

出发，证明了一些其它的事实。

这些图形的事实虽然大部分已经是埃及和巴比伦人们所熟悉的，但是托列斯以"证明"的形式阐述它们的正确性为其最大的特征。托列斯这种伟大的业绩，被德国大哲学家康德（1724～1804）称赞为「思想方法的革命」。从埃及以及巴比伦以来的，在经验上已知而且在

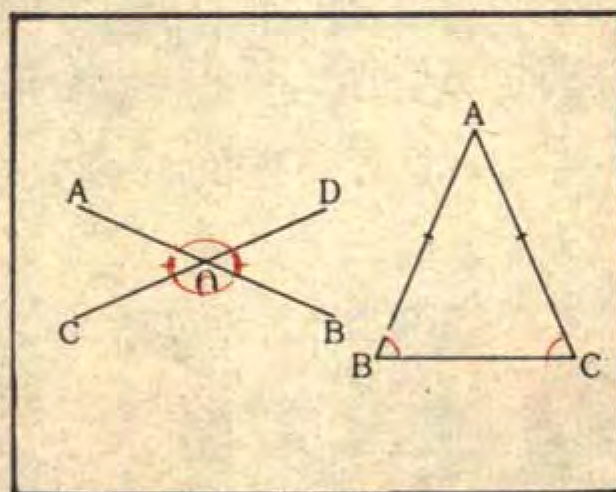


图 11　「对顶角相等」「等腰三角形的两底角相等」

实际上已经应用的有关图形的知识，是由托列斯把它们作为几何学的学问而构成理论的系统。也就是，奠定了今天几何学中所使用的定义、定理、证明等形式的基础。

其次，是我们所熟悉的毕达哥拉斯定理(三平方定理)的的**毕达哥拉斯**（B. C. 582～493）也到埃及以及巴比伦去学习，归国后在南意大利开办学校，教了很多学生。他相信数、图形、音乐、宇宙之间有一种美的调和，他创造了音乐的毕达哥拉斯音阶，他又树立了「万物都是数」的思想，重视数（自然数）在自然界应起到的作用。奇数、偶数、互质的数，**毕达哥拉斯数**(例如3，4，5；5，12，13等，满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个自然数 a,b,c 数组叫毕达哥拉斯数)等等，他所研究的问题是多方面的。他注意由所取的调和



图 12 毕达哥拉斯（右图左侧是非洛劳斯）

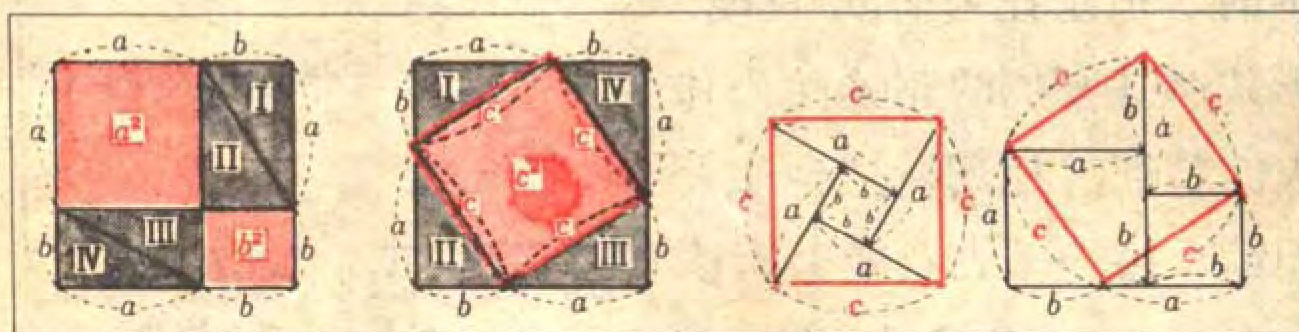


图 13 毕达哥拉斯定理（三平方定理）$a^2+b^2=c^2$

点而排成美丽的图形所表示的数。图14的**三角数**以及图15的**四角数**等都是典型的实例。

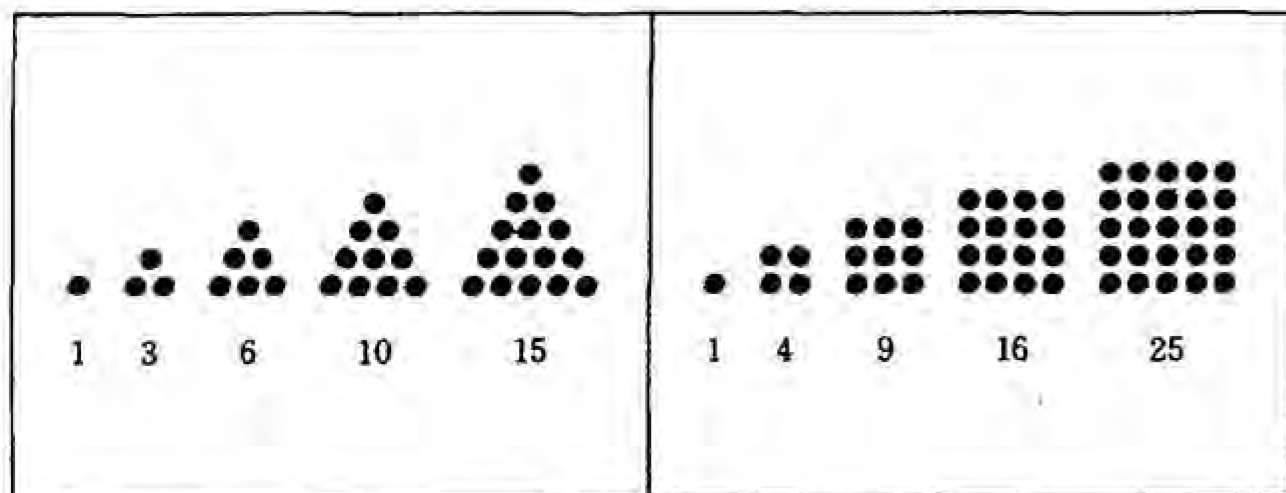
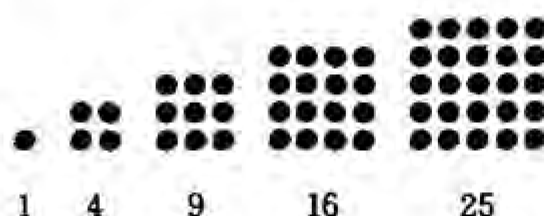



图 14 三角数　　　　图 15 四角数

有名的毕达哥拉斯定理这个事实，已经在巴比伦时代就被人们所熟知，而这个定理的证明大概也是毕达哥拉斯首先提出的。他的证明大约是象图13的左边那两个。

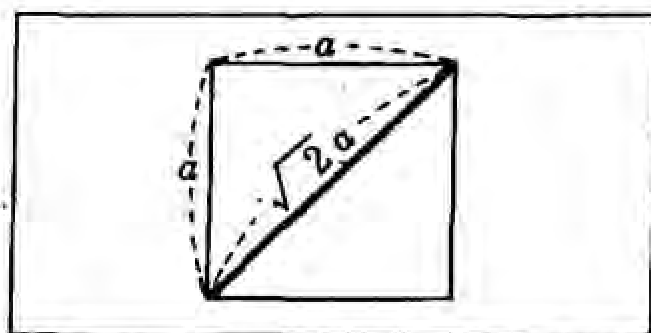


图 16 正方形一边与对角线的比 $1:\sqrt{2}$

在当时，所谓数就是理解为自然数和表示两个自然数比的数，即**有理数**，希腊人重视比和比例的重要意义。因此，认为任何线段长度的比都可以表示为自然数的比。但是，当知道如图16的正方形的一边长度与对角线长度之比不能用自然数的比来表示时，惊讶不已。

苏格拉底（B.C. 469～399）的弟子**伯拉图**（B.C. 429～347）

也是哲学家，为了对数学的研究，在阿克德米亚的森林中修建了学校，培育很多学者。在证明等方面所用的由三段论法开始而构成的逻辑学，首先由**亚里斯多德**（B.C. 384～322）提出，他也是伯拉图的学生。

〖希腊时代的三大难题〗　在萨拉米斯海战中希腊打败了波斯，希腊的文化中心迁移到雅典，在那里集聚了很多学者。在这些学者中出现了所谓**索非斯**学派，他们教辩论术和研究数学。索非斯学派提出的几何学问题中有“仅以直尺圆规解下列问题’。

① **角的三等分问题**：三等分已给的任意角。

② **立方体倍积问题**：作立方体，它的体积等于已知立方体体积的二倍。

③ **圆积问题**：作正方形，使它的面积等于已知圆的面积。

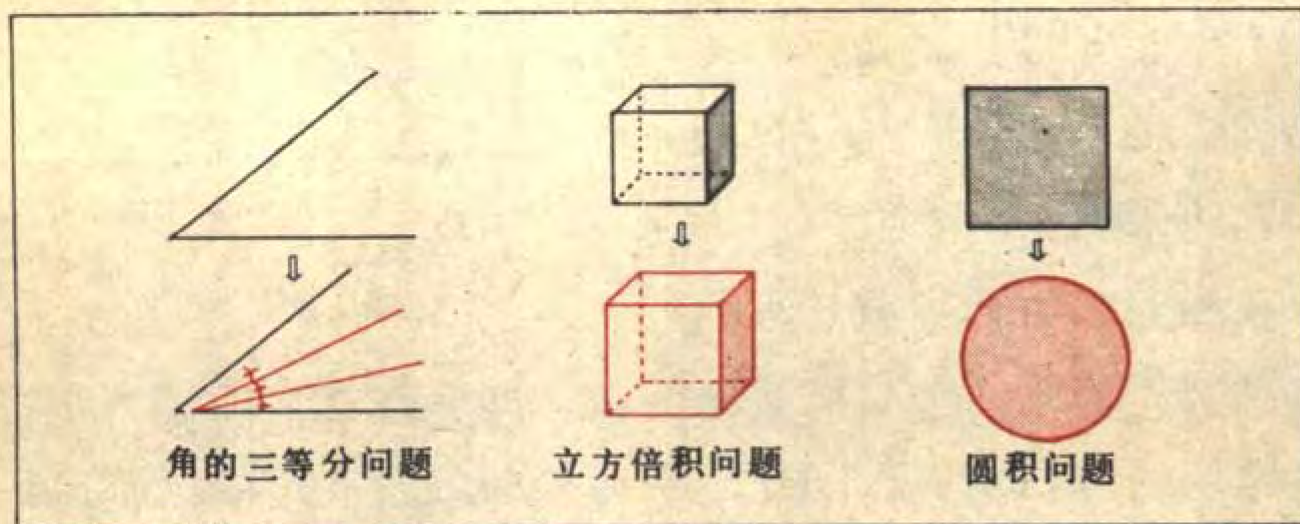


图 17　希腊时代的三大难题

这个问题，对于想求解的数学家们是个长期困惑没有得到解决的问题，到19世纪，才知道这三个问题，仅限于用直

尺、圆规是不能作图的问题。

〖**切能的诗理**〗毕达哥拉斯等人也考虑了线段是很小的点的集合，这个想法从根本上动摇了有名的**切能的诗理**(B.C.约490～430)。下面是它的一个例子。**阿克雷斯与龟的赛跑**:「跑的很快的阿克雷斯追不上龟」

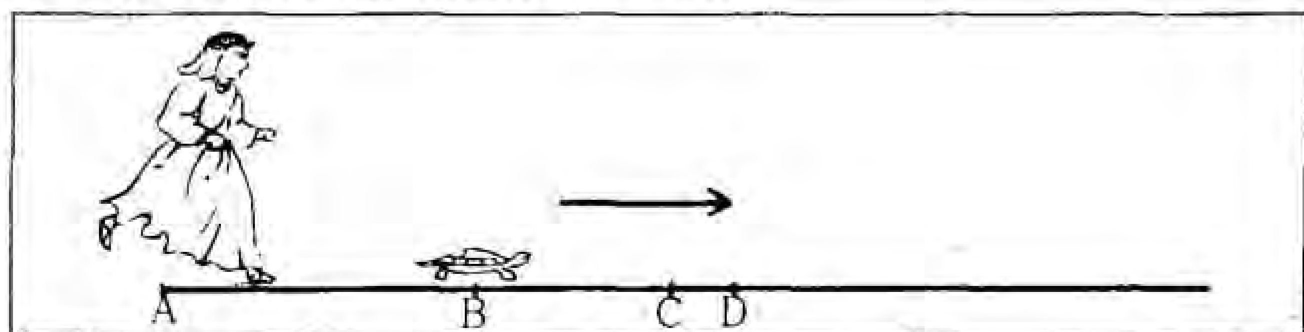


图 18 阿克雷斯与龟赛跑

如图18，设阿克雷斯从**A**出发追在他前方**B**处的龟。当阿克雷斯到达**B**时，龟已经前进到**C**，然后当阿克雷斯到达**C**时，龟又已经前进到**D**，……，这样结果阿克雷斯追不上龟。

(2) 亚历山大时代的几何学

希腊的繁荣的文化也以伯拉图时代为顶点而逐渐衰落，文化的中心转移到亚历山大，在这里有很多学者对学术进行了研究。

著名的欧几里德就是其中的一个人，关于他将在后面再来叙述。

为了研究王冠所用的**阿基米德原理**而著名的**阿基米德**(B.C. 287?～212) 他首先研究物理，天文和力学，关于数学如

由抛物线所围成的部分的面积、球的表面积、体积的计算、从圆的内接外切正多边形的面积算得圆周率 π 的值为

$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$ 等等作了重要的研究。

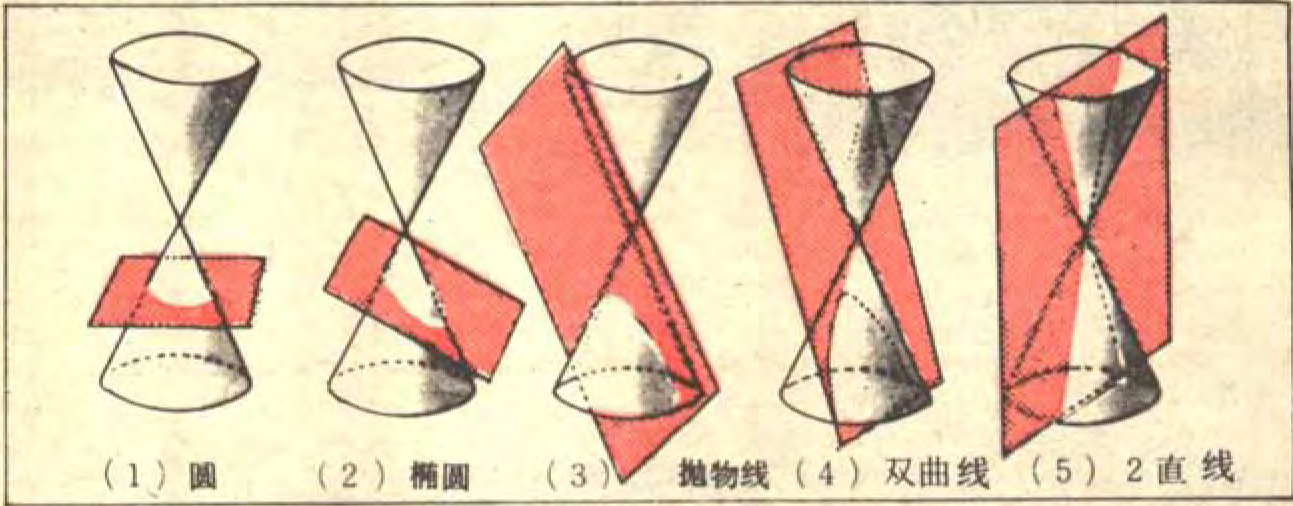


图 19 正圆锥的平面截口

又，**阿波罗纽斯**（B. C. 260〜200）研究了圆锥曲线。如图19，把圆锥用不同倾斜度的平面去截，截口曲线（圆、椭圆、抛物线以及双曲线等）叫做**圆锥曲线**或**二次曲线**。

随着当时交通的发展以及航海的需要，对天文学和三角比的研究也兴盛起来。

埃拉特斯特奈斯（B. C. 275〜194）利用夏至那天正午太阳的高度计算了地球的周长，用今天的表示方法是四万二千km。又，如右表把质数按大小的顺序选出。他想出了所谓埃

1 ② ③ 4 ⑤ 6 ⑦ 8 9 10
⑪ 12 ⑬ 14 15 16 ⑰ 18 ⑲ 20
21 22 ㉓ 24 25 26 27 28 ㉙ 30
㉛ 32 33 34 35 36 ㊲ 38 39 40
· · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·

埃拉特斯特奈斯的筛法

拉特斯特奈斯的筛法。

被称为天文学之父的赫兹巴尔克斯（B. C. 150左右）考虑了正弦（sin），余弦(cos)等三角法。

§3 .欧几里德几何学的诞生

（1） 欧几里德的『几何学原本』

欧几里德是公元前三百年左右的人，关于他一生中的详细情况虽不甚清楚，但据说他曾在伯拉图的学校学习，后来他又在亚历山大研究数学。他对到他那个时代为止的数学进行了认真的研究，他把它们按顺序排成很严整的体系，而形成由十三卷构成的『几何学原本』这样的经典著作。这部书，



图 20 欧几里德

就是在他以后，学者们在归纳其所研究的成果时，在很长时期也承认，他是在归纳方法上的典范。就是到现在也被人们当作圣经一样的著作来阅读。

这部书是以『几何学原本』（以下简称原本）为标题，但它的内容不只是图形知识，他也包括当时的其它数学内容。在

这里，对原本略加介绍。

原本中首先叙述了23个定义，用它们说明以后要用到的术语的含义。例如



图 21 「几何原本」的一部分

【定义】

1　点是没有部分的。

2　线是有长度而没有宽度的。

3　线的两端是点。

………………

23　平行线是在同一平面上而且不论向两侧怎样延长在任何一侧也不相交的直线。

其次，又提出了五条**公设**(要求)和五条**公理**(共同概念)的假定。

所谓**公设**，就是上面定义的点、直线、角和圆……等之间成立的事实，把几何作图中谁都承认的事实明确地叙述如下：

〖公设〗

1　从每个点到另外一个点可引直线。

2　任何线段都可以无限延长。

3　以任何点为圆心，任何长为半径都可以画圆。

4　凡是直角都相等。

5　一直线与两直线相交，如果同侧内角之和小于二直

角时，则延长这两条直线后，必相交于两角和小于二直角的那一侧。

所谓**公理**是，被承认是正确的、而且是后面进行理论研究的基础的事实。在原本中的公理，不仅是几何的，而是适用于更广泛的全部数学的事实，他提出五条公理如下：

〖**公理**〗

1 与同一量相等的量，彼此相等。

2 于相等量加上相等量，全体也相等。

3 从相等量中减去相等量，其剩余也相等。

4 能互相重合的图形都相等。

5 全体大于它的部分。

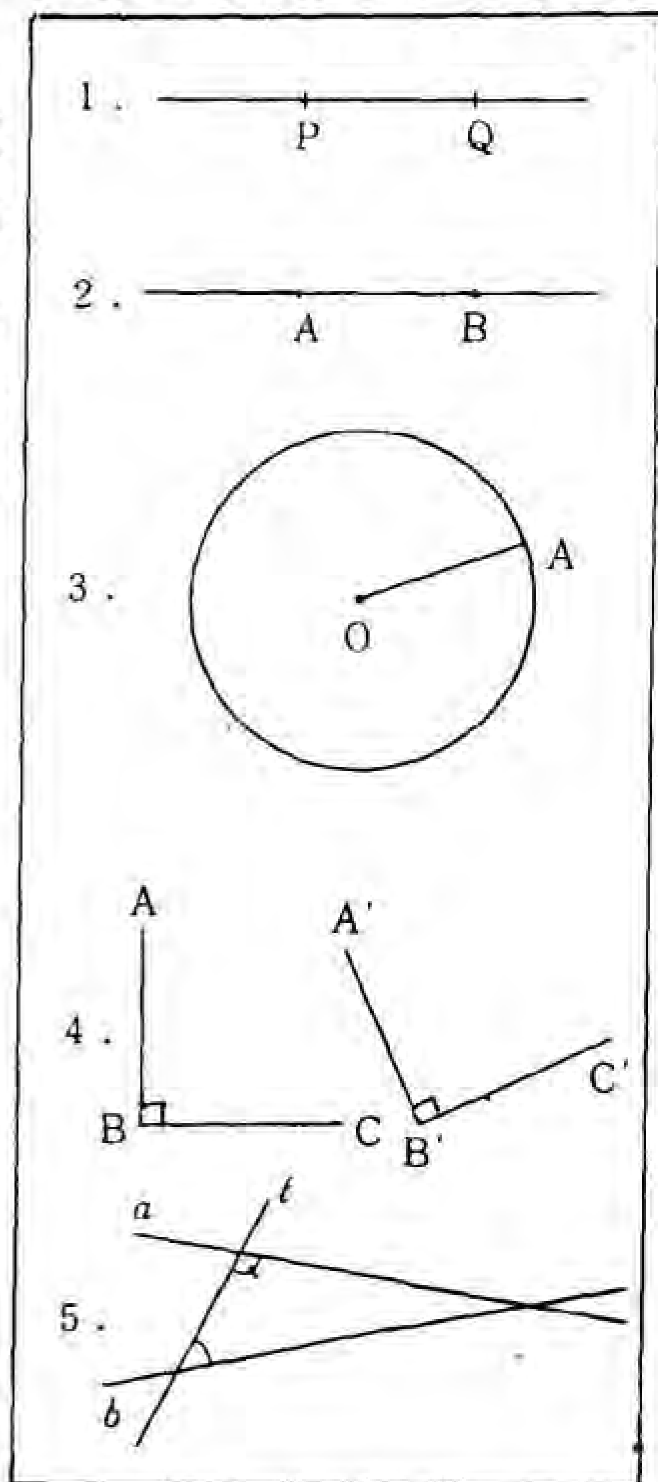


图 22 欧几里德公设

在建立数学理论过程中，必须从一些事实为基础来进行。欧几里德就是以任何人都认为是当然的事实，提出了上述的五条公设和五条公理为基础，从定义和公设以及公理出发依次地导出定理证明而构成了这

种结构的几何学。

这个几何学就是大家熟悉的所谓**欧几里德几何学**。

这就是它从开始到现在经过了二千多年，对世界各国关于图形研究给以极大影响的欧几里德几何学的形成。

（2） 平行线公设

在欧几里德的原本中，关于平行线已经在前面（1）的定义中第23条提出，说明平行线的公设五，常被叫作**平行线公设**。

在数学中，利用基础事实或者已被指明为正确的事实能被逻辑地加以证明的重要结论或性质，叫作**定理**。

现在，观察前面提出的五条公设，从公设1到公设4，比较容易理解。最后的公设五（平行公设），在叙述上比较麻烦，而且与其它公设相比，觉得很不自然。

在那里，它成为一个问题，这个公设五是否可以利用公设1，2，3，4 和公理1，2，3，4，5 进行证明呢，也就是想不把公设五为基本假设，而是想它是否能被证明。

从而就想对这个问题进行证明，从欧几里德以后经过二千年，世界上各国的许多数学家都努力地进行了研究，但都没成功。

前面的平行线公设，叙述的形式上是很麻烦的，但它所叙述的事实可以用和它等价的说法来代替。例如。

「通过直线外一点与已知直线平行的直线只有一条」,「三角形的内角和等于二直角」。

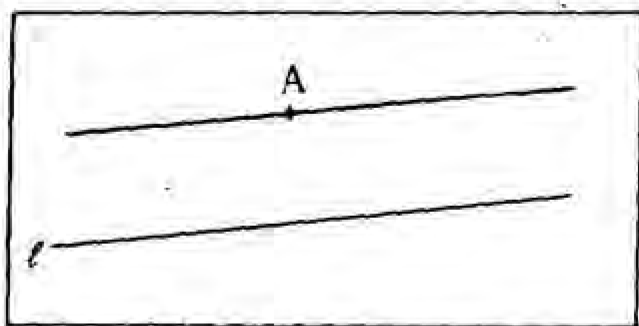


图 23 过直线外一点的平行线

围绕平行线公设的研究,一直到十九世纪的前叶,而导致产生了下节中将叙述的与欧几里德几何不同的非欧几何学。

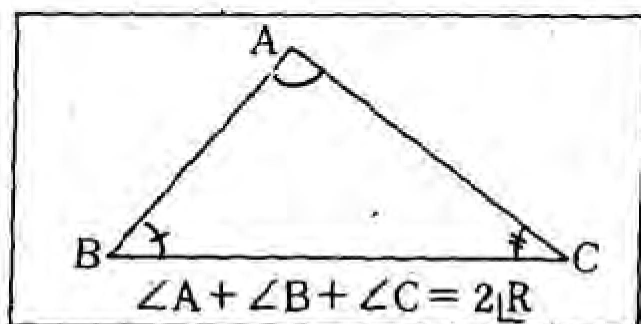


图 24 三角形的内角和等于二直角

在欧几里德的原本中,到处都有必须证明而没证明,直观上已知而不证明就使用的情形,改正了这些缺点并形成在逻辑上完备的几何学,是到二十世纪才建立起来。关于这方面,将在后面第Ⅰ章 §5 中再加以说明。

§4 非欧几里德几何学的发现

关于欧几里德原本的第五公设(平行线公设)的研究,直至十九世纪的前叶,正如将要介绍的向两个方向发展。

(1) 罗巴切夫斯基——波里埃的非欧几里德几何学

俄国(苏联)的**罗巴切夫斯基**(1793～1856)和匈牙利的波**里埃**(1802～1860)几乎同时,并且是 各自地把欧几里德的第五公设 用



图 25 罗巴切夫斯基

「过直线外一点可引出无限多条与已知直线不相交（平行的）直线」。来代替，也建立卓越的几何学，并且明确了第五公设是不能利用其余公设和公理来证明的。把这种几何学叫作**罗巴切夫斯基——波里埃的非欧几里德几何学**。



图 26 波里埃

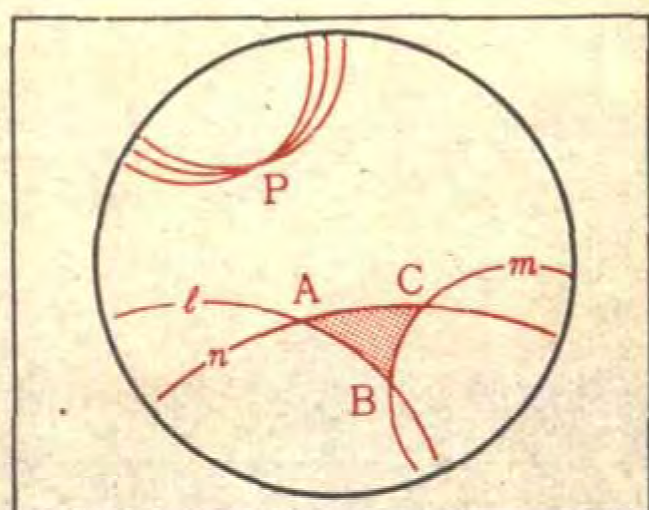


图 27 庞加来模型

这个几何学的模型，可用各种图来表示，例如图27是**庞加来**（1854～1912）模型，他把欧几里德几何的圆片看作全"平面"，把与这个圆周正交的圆弧看作"直线"，把圆内的点或圆与弧的交点看作"点"。

在这里，直线 l,m,n 的交点构成三角形ABC，例如由图可知，通过直线 l 外的一点P，可作无限多条直线与 l 不相交（平行）。


图 28 黎曼

（2） 黎曼的非欧几里德几何学

比罗巴切夫斯基或波里埃稍晚一点，德国的黎曼（1826～1866）也把欧几里德的第五公设用「过直线外一点与已知直线不相交的直线不存在」来代替，以它为基础也产生了几何学。这个几何学叫作**黎曼的非欧几里德几何学**。

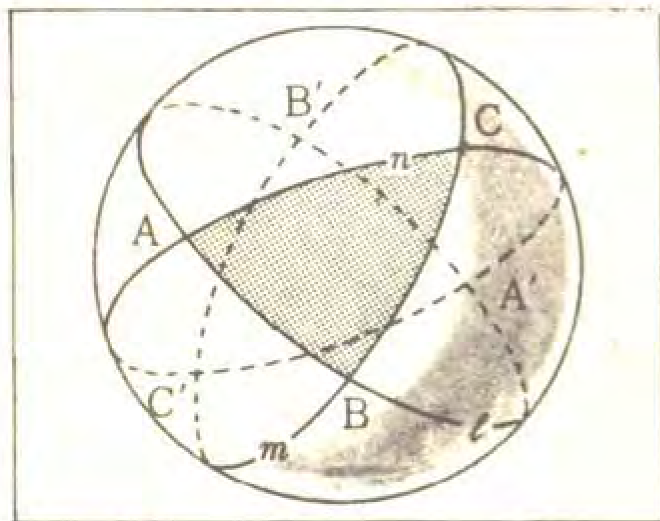


图 29 黎曼几何的模型

这个几何学的模型是，如图29，把欧几里德几何学的球面看作为全“平面”，通过球面直径两端点的大圆为“直线”，把球面上的点或大圆的交点看作“点”，则在这个球面上可以建立几何。但是，因为两个大圆在直径的两端交于两点，为了使“二直线”的“交点”只有一个，可把这两个点看作为一个点。因为在球面的两个大圆都相交，因此，在这个“平面”上不存在不相交（平行的）的直线。又从图29中

看出直线 l, m, n 的交点确定三角形ABC 。

在上面的两种非欧几里德几何学中也象“平面”上完全重合的图形叫作“合同”图形一样来定义“合同”。

到这里为止出现的三种几何学，把它们的重要特征列出如下：

	欧几里德几何学	非欧几里德几何学	
		罗巴切夫斯基—波里埃几何学	黎曼几何学
过直线外一点的平行线	只存在一条	存在无限多条	一条也不存在
三角形的内角和	二直角	小于二直角	大于二直角
直线的长度	无限长	无限长	有限长但无终点

在欧几里德的平面上或空间中，可以作出象前面作过的非欧几里德几何学的模型，因此可知，如果这些几何学中的一个正确，则另一个几何学也正确。

如同从对欧几里德几何学的第五公设的研究中而发现了非欧几里德的新几何学那样，在数学中为解决某个问题的研究中而发现或推广成新的分支的事实是很多的。

关于几何学，除到现在为止所阐述的以外还有各种几何学，也都正在研究当中。

第Ⅱ章 空间和图形

§1 从物体的形到图形

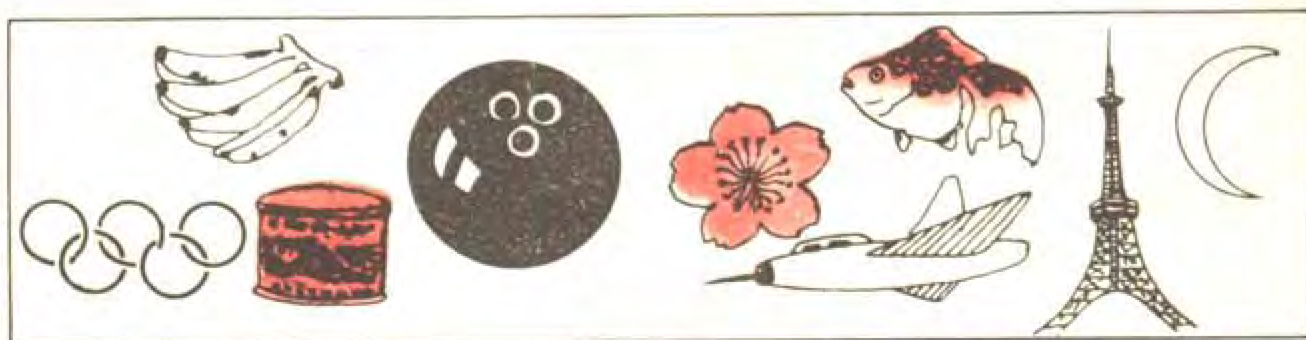


图1 各种物体的形状

在我们周围，如图1那样的物体多的数不胜数，这些物体具有形状、大小、位置、颜色、味、强度、用途和产地……等等各种属性。

如果我们只着眼于物体的形（或大小），而不考虑其它属性，而且仅考虑这些物体的形状的抽象化的形时，则得到作为数学研究对象的图形。

例如在图2中，教科书的书皮稍有皱纹、镜子的角稍成圆形、桌面稍有伤痕等等，对那些琐碎的情形都不管它，而

只着眼于它的形，那么教科书的书皮、镜子面、桌子面等它们共同的抽象化的形“四个角是直角的四边形”它可以看作是在数学中叫作「矩形」的图形。这种思考方法对于其它图形也都适用。

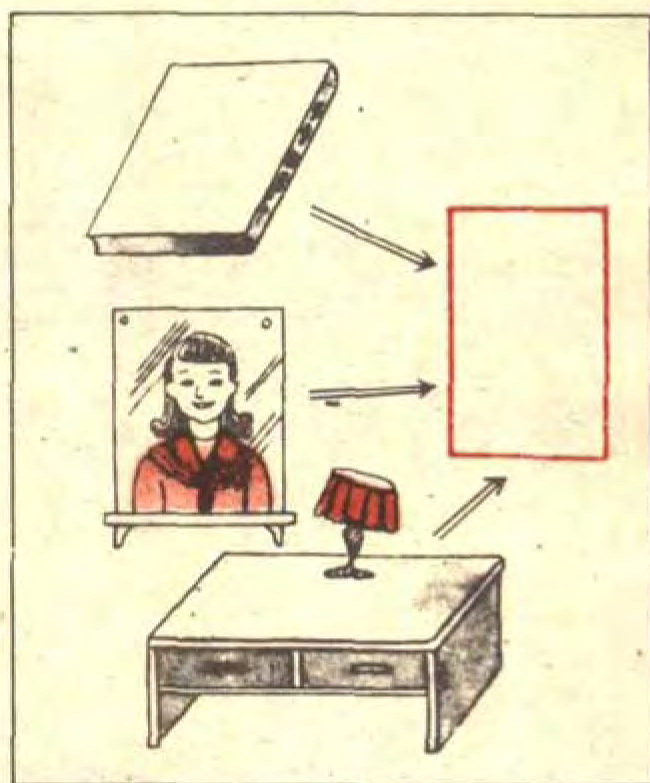


图 2 考虑抽象化后的矩形

因此，对于上面所考虑的图形，为了明确图形的性质，更深入的理解它们以及研究它们之间的关系，必须从研究构成图形的元素顶点、边、面这些元素的个数、大小以及平行、垂直、合同关系和结合关系，或者作图形、作模型、分解以及展开和合成、运动等等，从各个角度进行研究是十分重要的。

把图形看作**点的集合**，也是研究图形的重要观点之一。

§2 空 间

在图形的研究中，对于三角形、四边形、圆、球、角锥……等基本图形的性质和这些图形之间的关系以及图形的大小有关的事项等等的研究是重要的，在§1中已经说过。但是，

与此同时，对于图形所在的空间的理解，对研究图形也是很重要的。

当看到空间这个词时，它是由空字与间字组合而得到的。空这个词具有“窟窿”或“洞”的意义，所谓间具有“隙”或“之间”的意思。从而，所谓空间，普通它意味着“空着的地方”或“空房间”，有时也用于表示宇宙和包含我们所在的地球的太空。

古代的巴勒斯奇纳的西伯莱人，认为我们所在的空间象是一个非常大的房子，复盖着平坦的地面，如图 3 那样，在它的周围布满着空间的星。地球象球的形状，这在古代希腊的毕达哥拉斯以及埃拉特斯特奈斯等是已经知道的……。



图 3　古代西伯莱人所想象的世界

可是，在数学中所谓空间，是把我们所在的世界抽象化，作为欧几里德几何成立的世界，在很长的时期内认为是欧几里德空间。

但是，如第Ⅰ章§4的图27以及图29，因为引起了把圆片和球的表面看作“平面”，把圆的弧和大圆看作“直线”，从而出现了把平面理解为平坦的面、把直线理解为无宽度的直线相矛盾的情况，因此，所谓空间就不仅限于是欧几里德空间。那么，什么是空间，就成为问

题了。对这个问题在这里不打算深入讨论，在这本书中提到空间时，主要是指具有以后§4中性质的欧几里德空间。

§3 研究空间和图形的方法

所谓对空间的结构和图形性质的研究，例如可以对图形的仔细观察，在图形的运动中来观察，把图形变换为式子以及画出图形进行研究等各种研究方法。在这里，介绍常用方法的四例如下。

（1） 欧几里德学派的方法

象前面说过的那样，以欧几里德原本为基础的几何学是欧几里德几何学。在这里虽然不是按原本原封不动的来进行，而是以欧几里德所处理的空间和图形为直接对象，用他的思

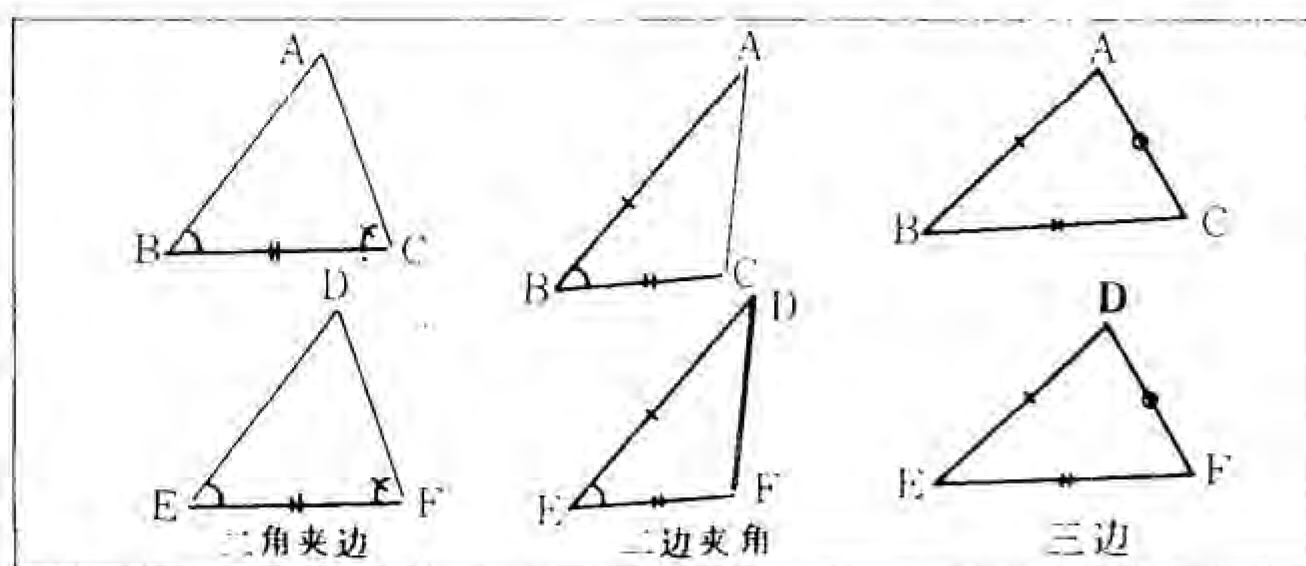


图4 三角形的合同

想方法来研究它们的性质，在这个意义上，叫作欧几里德学派的方法。

欧几里德对于图形的观点，充分表现了古希腊人对事物的观点，他是在严格限制的基础上处理图形。

例如，欧几里德考虑尽量能把图形剖分为三角形，从研究三角形的性质可以达到研究各种图形的性质的目的。所以在欧几里德学派的研究方法中，如图4所示的**三角形合同**是非常重要的基本思想方法。这样，对于三角形就不用说了，把图形看作不动的自己完全重合，对于平面图形来说，一个图形经过移动与另一个图形重合时，则说这两个图形**合同**。因此，把这个合同看作是研究图形性质的**杠杆**。

在欧几里德的以这个合同思想为基础的几何中，是以研究图形的性质为中心，可以说对于图形所在的平面以及空间的结构不作详细的研究。

正如介绍希腊时代三大难题的第一章那样，作图方法中只允许使用直尺、圆规，则可作的基本图形只是直线和圆。

上面叙述了欧几里德对图形的观点和思想方法，由这种欧几里德学派研究图形的性质的方法，不论从哪方面说都是把图形本身作为静止的东西来研究的。

因此，在欧几里德学派几何学的进展中，常常听到批评，但是作为由我们所在的世界抽象化的欧几里德空间，不论是从学生的发展阶段上来考虑，或者是用其它方法对图形性质

的研究的方便，在图形的研究中，它仍是具有重要意义的。

（2） **利用坐标的方法**

如图 5，平面上直线 l 可用方程 $y=\frac{1}{2}x+3$ 表示，对平面来说，利用在它上面确定的直交坐标轴，则平面上任意点 P 可用两个数 x 和 y 的序对（x，y）作为坐标来表示，利用这个坐标，图形可用 x，y 的方程来表示。因此，图形的性质可通过由坐标所确定的方程来研究。

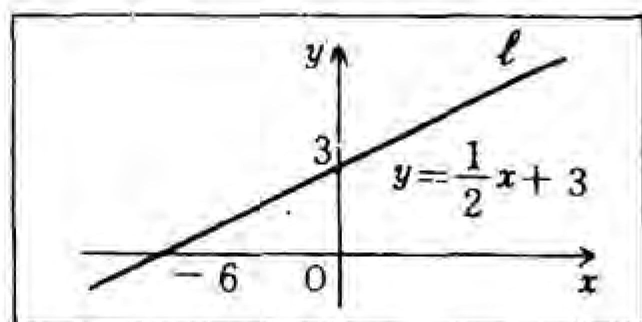


图 5 直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+3$

（3） **利用向量的方法**

具有大小和方向的量叫作**向量**。这个向量如图 6 用有向

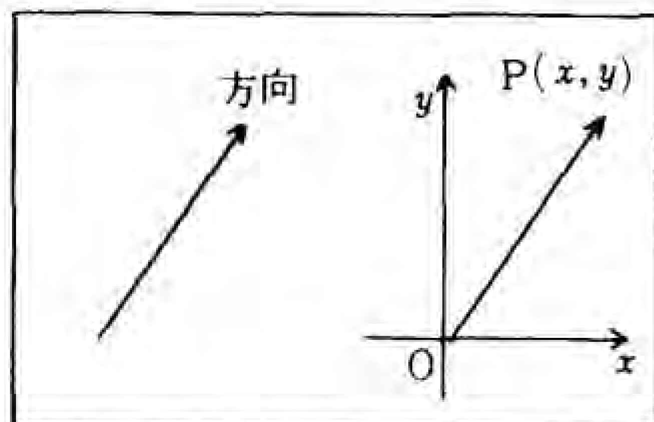


图 6 有向线段　　图 7 位置向量

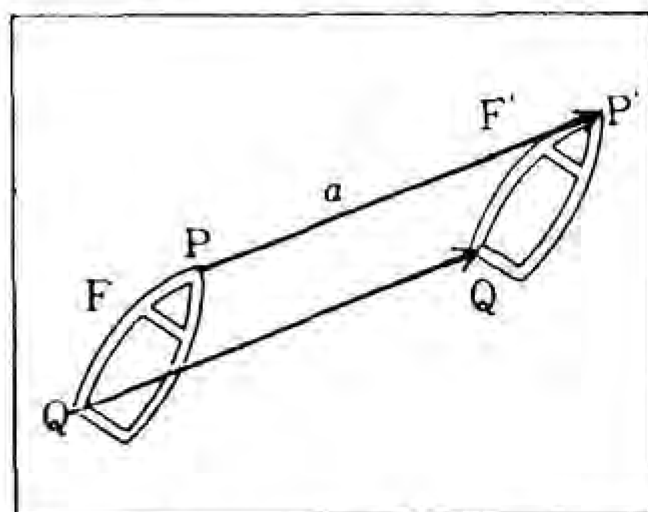


图 8 把图形 F 映射为 F' 的平行移动

线段的矢线来表示。例如对平面上任意点p，则对应从原点O指向p的向量（称之为**位置向量**）。利用这个向量可以研究图形的性质。

（4）　利用变换的方法

把图形看作点的集合时，把图形F上的各个点，象图8那样，沿一定方向仅按一定长度进行映射时，叫作**平行移动变换**，如图9，把图形F映射为图形F′的是**相似变换**。利用这样变换也可以研究图形的性质。

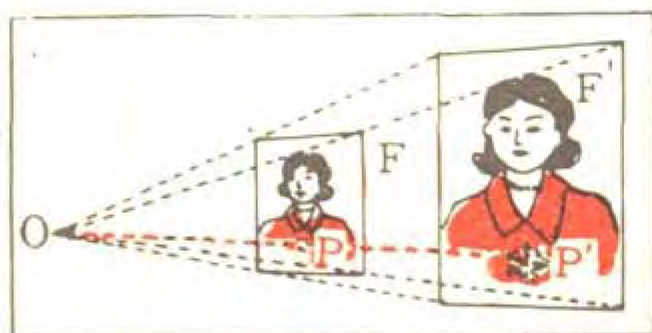


图9　把图形F映射为图形F′的相似变换

§4　空间的性质（Ⅰ）

在本书中所说的空间，象在21页已经说过那样，主要是指欧几里德空间。因此，为了理解这个空间是什么，必须理解

（1）　在空间中存在什么

（2）　空间具有什么性质

在这里，关于（1）在这§4中，关于（2）在这§4和§5中进行研究。

（1）　在空间中存在什么



图 10 全世界！

在很长的铁线(例如电线)上爬行的蝴蝶幼虫的青虫，对于这个青虫也可能认为这个铁线就是全世界。

在广阔的地面上爬行的小蚂蚁，这个蚂蚁也许把宽广的地面看作全世界。

同样，在广阔的空间中飞翔的小蜜蜂，这个蜜蜂也许把广阔的空间看作全世界。

如上例所列举的铁线、地平面以及到处广阔的空间作高度抽象化，可以看作直线、平面以及(立体的)空间。因此，这样的直线、平面以及(立体的)空间，我们都可以称之为**空间**。与直线、平面以及(立体的)空间类似的对象，除上面例子之外在实际中常可见到，但比(立体的)空间更广的空间是不能直接看到的。但是，对研究数学的人来说，在头脑中设想更广泛的空间，更便于进行数学的研究。这是多么有意义的事情！

(2) 空间具有什么性质

直线、平面以及(立体的)空间都是可以任意扩展的。例如直线可向左右方向，平面可向左右和前后，而(立体的)

空间可向左右、前后以及上下方向扩展。换句话说，直线、平面以及（立体的）空间可以无限的扩展，只须注意它们扩展的方式不同。为表示扩展方式的不同而用**维数**这个术语。



图 11 辩论

维数这个术语，常用于在辩论中意见相反时说「那句话和这句话维数不同!」。

可是，若用维数这个术语，则可以说：

直线是一维空间，
平面是二维空间，
（立体的）空间是三维空间。

而且，前面已经提到，在数学中也考虑四维以上的空间。

对于上面提到的维数不同是空间的扩展方式也不同的明显的例子是，注意它是确定点的坐标的思想方法。

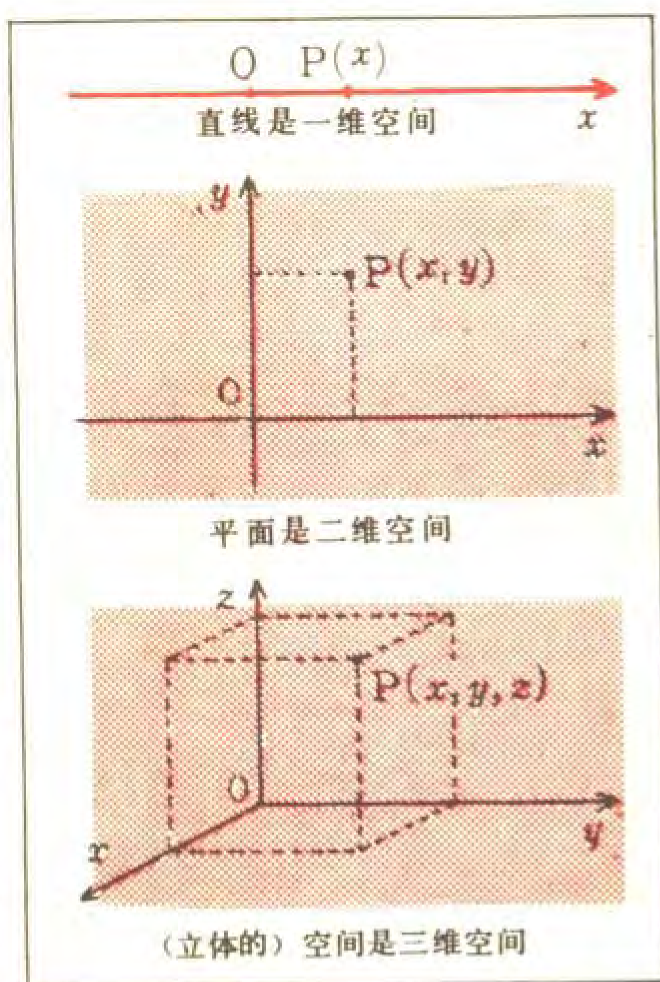


图 12 空间维数的不同表现为点的坐标的不同

- 数轴上的点P是P（x）
- 坐标平面上的点P是P（x，y）
- （立体的）空间内的点P是P（x，y，z）。

表示各个空间点P的坐标(分量)的个数是一个、两个以及三个。这个不同，不用说，是由空间的广阔程度不同而产生的。这样，直线、平面以及（立体）空间的广阔程度虽有不同，但是，作为这些空间共同的性质是什么？例如可举出它们的共同性质如下。

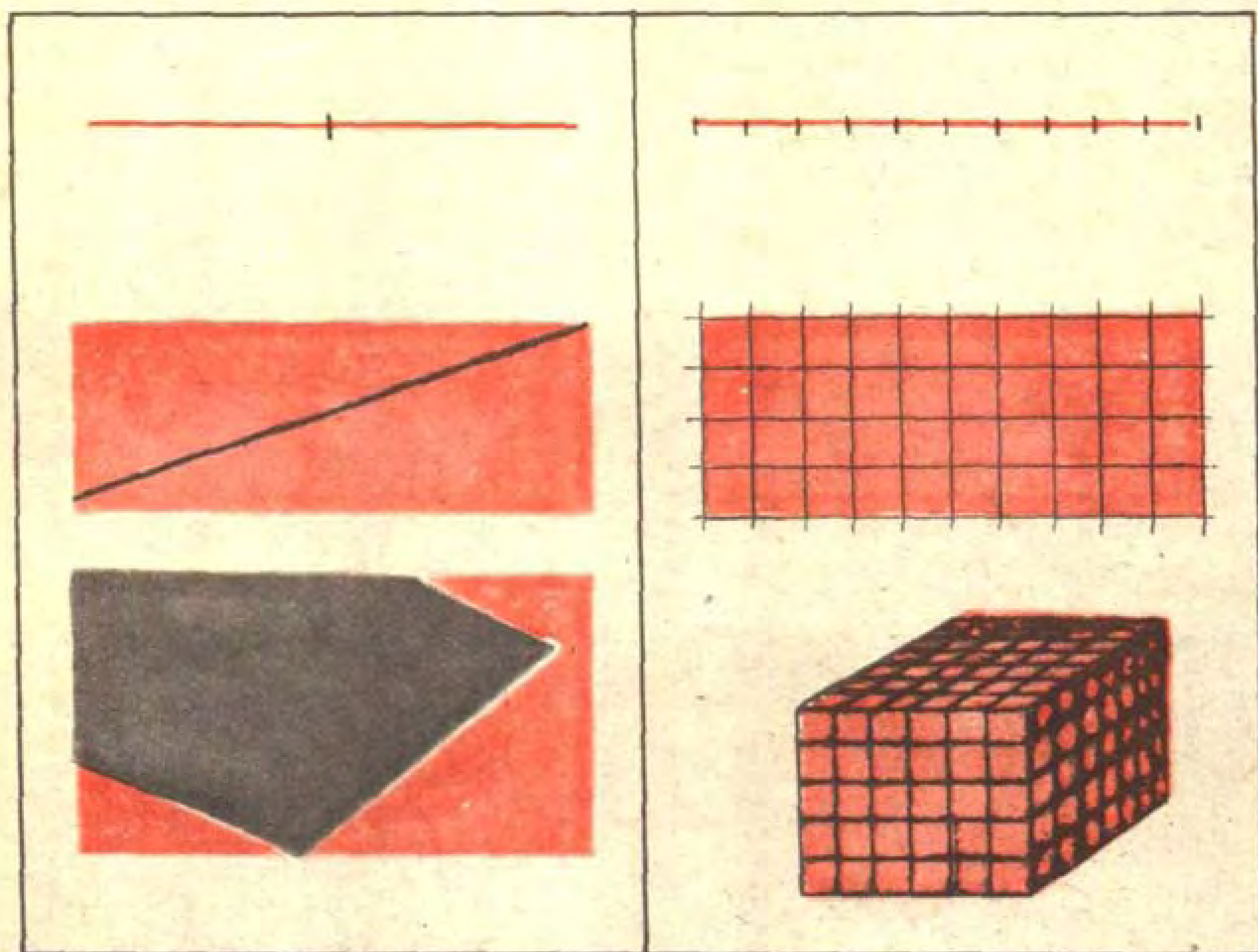


图 13 把空间分割为两部分　　图 14 空间由确定大小的图形填满

○空间是连续的，而且到处都具有同样状态。

○空间都可以扩展为原来的空间，即用什么把它围起来也是围不住的。

○直线是可用其上一点剖分成两部分。平面是不能被它上面的点所剖分，但可被一直线剖分两个部分。（立体的）空间，不能被其中一点或直线所剖分，但可由一平面剖分为两部分。

而且，这样的剖分是任意的（图13）。

○在直线上点和线段；在平面上，点、线段、三角形、圆、……等；在（立体的）空间内，点、线段、三角形、圆、长方体、球、……，等等，它们都是可以自由运动的。

总之，在空间内，图形是可以自由移动的。

○直线可由确定长度的线段连接起来；平面可由确定面积的正方形铺砌起来；（立体的）空间可由确定体积的立方体堆砌起来，把它填满。

这时，与确定的长度、面积以及体积的大小无关。这个事实，例如，以直线为例来说，它意味着直线上某线段的长度，可以用适当长度为单位进行**测度**。按同样想法，对平面和（立体的）空间也是一样，对于空间内图形的大小，取适当的单位（以适当图形的大小为单位）是可以**测定的**（图14）。

对具有这种性质的空间，从幼小的时候就开始注意其中的元素之间的结合关系以及与大小相关连的问题，逐渐地就能掌握它的全体。

§5 空间的性质（Ⅱ）



图 15 高斯测定的三角形

（1） 现实空间是欧几里德空间？

在前面已经说过，欧几里德空间是把我们所在的现实空间经抽象化而得到的空间，但是，在这个现实空间中还不知道三角形的内角和是不是二直角。关于这方面，例如**高斯**（1777～1855）测定了如图15中以三个山顶为顶点的大三角形的角，计算了三个内角和，它的和是否是二直角，仅由这还不能说明问题。


图 16 希尔伯特

后来，著名的物理学家爱因斯坦（1879～1955）等人认为与其说现实空间是欧几里德空间，莫如说稍有变形的空间为好。

（2） 希尔伯特的『几何学基础』

关于欧几里德空间的性质，

在第Ⅰ章中已经提到，在这里对这个空间的结构和性质再进一步稍作系统的研究。为此，提出欧几里德空间的特证性质的同时还与其它空间比，研究它的相同和不同性质。

欧几里德在它的原本中是以公设和公理为基础而推导出定理这样结构的几何学，其中存在在逻辑上不够完备的地方，这在前面已经提过。到十九世纪末叶，德国的**希尔伯特**（1862～1943）在名为『**几何学基础**』的著作中给出结构完备的欧几里德几何学。

在希尔伯特的著作中，对点、直线以及平面是什么，没有给出任何说明，但给出叙述点、直线以及平面之间关系的五组公理而进行逻辑推演。这里重要的是，对于欧几里德作为基础的公设和公理认为是"**自明之理**"，所列举出从经验而得到的当然事实，而希尔伯特把这些作为基础的公理完全看作"**约定**"或"**假设**"。即，开始就设定一些作为基础的约定和假设，在不违反这个约定和假设下来建立理论体系。在现在数学的研究方法中，很多都是按照希尔伯特的作法进行的。

那么，希尔伯特作为他的基础公理是些什么？这也许是稍难一些，关于平面的情形，介绍如下（以下Ⅰ～Ⅴ公理的一部分略去也可以）。

Ⅰ　结合公理

1　两点确定一条直线（图17）。

2　过不同两点只存在一条直线（图17）。



图 17



图 18



图 19



图 20

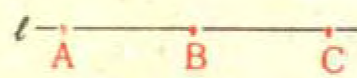


图 21

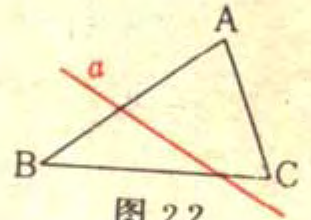


图 22

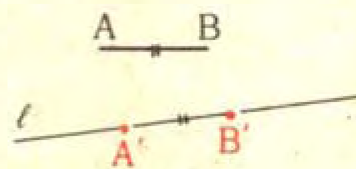


图 23

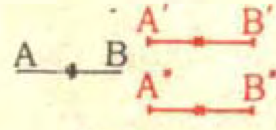


图 24

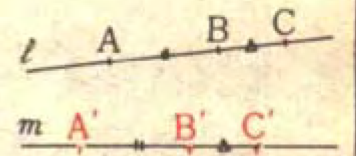


图 25


图 26

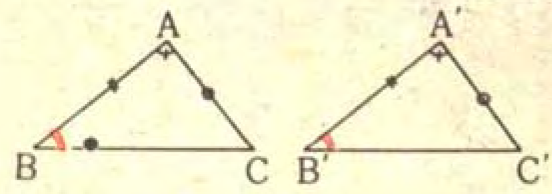


图 27



图 28





图 29



图 30

图 17～ 30 希尔伯特公理

3　直线上至少存在两点（图18）。

4　在平面上存在不在一直线上的三点（图19）。

Ⅱ　顺序公理

1　A、B、C 是一直线上三点，如果点B 在点A与点C之间，这时点B 在点C与点A 之间。（A与 C之间的点的全体的集合叫作线段A C）（图20）。

2　如果A，B 是一直线上的不同两点，在这直线上可取第三点C，则可使B 在A与C之间。（这时，说C 在线段AB 的延长线上。把线段A B 以及延长线上点叫作在A向B 侧的点。A向B 侧的点全体的集合叫作从A向B 的射线。从一点引出的两条射线作成以它们为边的角）（图21）。

3　如果一直线上有三点，则其中只有一点在其余两点之间。

4　设A，B，C是不在一条直线上的三点，直线a不过A，B，C 的任何点时，如果a与线段A B有一个公共点，则必与AC或B C也有一个公共点（从这里可定义直线的侧）（图22）。

Ⅲ　合同公理

1　已给线段A B 和直线l上一点A′，如果指定A′的某侧时，则在该侧存在一点B′，使AB 与A′ B′合同（记作A B≡A′B′）（图23）。

2　与相等的线段合同的线段互相合同（图24）。

3　设点B 在点A，C之间，点B′在A′，C′之间，如果

$AB \equiv A'B'$，$BC \equiv B'C'$，则 $AC \equiv A'C'$（图25）。

4 如果已给出一个角，一条射线和指定了的一侧时，则存在以已给射线为一边，在指定的那一侧与已给角合同的角（图26）。

5 设 A, B, C 和 A', B', C' 都是不在一直线上三点，如果 $AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，$\angle A = \angle A'$ 则 $\angle B = \angle B'$（图27）。

Ⅳ 平行公理

如果已给出直线 l 和不在它上面的一点 A，则存在唯一的一条过 A 且与 l 不相交的直线（图28）。

Ⅴ 连续公理

1 设 AB 和 CD 是两个线段，在连接 A, B 的直线上取点 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n$，如果线段 $AA_1, A_1A_2 \cdots\cdots, A_{n-1}A_n$ 都与 CD 合同，则可使 B 在 AA_n 之间（阿基米德公理）（图29）。

2. 如果在线段 AB 上存在两点 A_1B_1，线段 A_1B_1 上存在两点 A_2, B_2，在线段 A_2B_2 上存在两点 $A_3, B_3, \cdots\cdots$，则所有线段 $AB, A_1B_1, A_2B_2, \cdots\cdots$，必有公共点（图30）。

为了使数学从理论上作到严密化，可以这样地理解，必须把所列举的这些基础事项，从一开始就给以明确约定才行。

从上面列出的公理Ⅰ－Ⅴ为基础可以导出图形的很多重要的性质。

现在，再考虑如图31的卵形面。对于这个面上的两点 A, B，所谓"线段"AB 是通过 A, B 的长度最短的曲线弧（图

31)，把这样的曲线弧延长叫作过两点**A**,**B**的"直线"。但是，在平面上连接两点的线段是唯一的（图32①），可是在这个"面"上连接两点的线段有两种情形（图32②）。在平面的直线上点**C**在**A**与**B**之间（图33①），但在这个"面"上**C**可以在**AB**之间

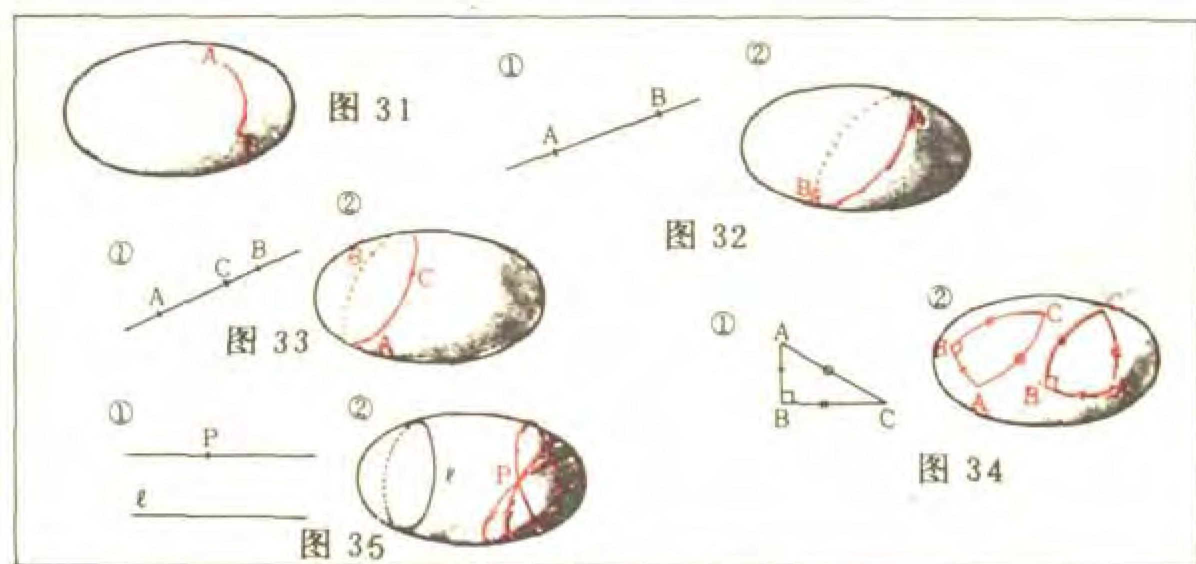


图 31－35 卵形面上的几何学

A可以在**C**与**B**之间，**B**可以在**A**与**C**之间，有时是不能确定的（图33②）。在平面上，有两条边和它们夹角相等的三角形，由合同条件可确定形状和大小（图34①），但在这个"面"上随位置的不同它的大小以及形状都不同（图34②），在平面上过直线外一点与已知直线平行的直线（不相交的直线）是唯一存在的（图35①），在这个"面"上可引两条以上的平行线（图35②）。

如图36，如果把圆柱、圆锥的表面看作"平面"时，那它与公理Ⅰ～Ⅴ所说的性质有哪些不同？例如，在图36①中，连接两点的"线段"只有一条？图36②中可以说**AB**＋**BC**＝**AC**，以及**B**在**A**与**C**之间？能说"直线"把"平面"剖分成两个部分？

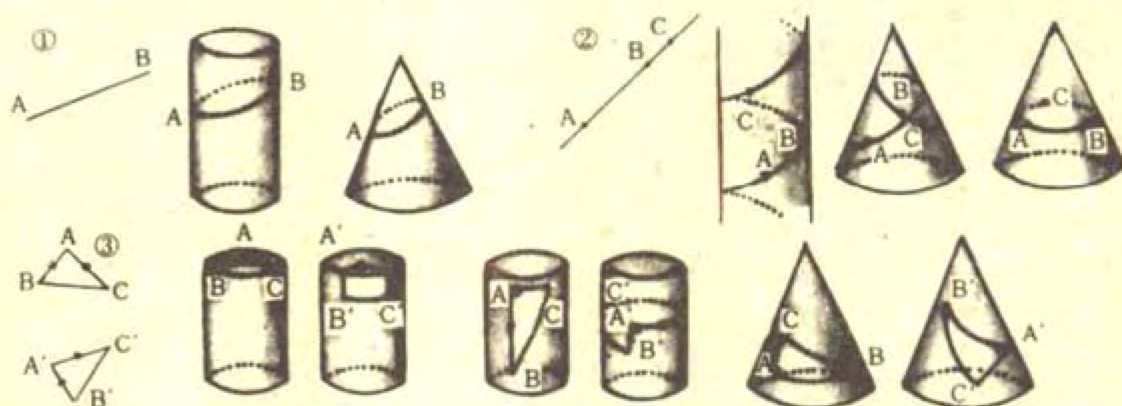


图 36 圆柱面、圆锥面上的几何

在图36③中能说$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$?等等,……。

现在举出一些有性质差别的例子,这是由平面(作为空间在前章已经说过了)性质与这些“平面”(曲面)的性质所导致的差别。因此,前面所说的作为具有欧几里德平面特征的公理Ⅰ～Ⅴ的性质可知它们任何一个都是十分重要的。

§6 图形的性质

〖空间与图形的性质〗 例如

(ⅰ)「二相交直线的对顶角相等」

(ⅱ)「从直线l外一点A与l上点连接的线段中,其长度以从A向l所引垂线的线段最短」

(ⅲ)「不相交的二直线平行」

(ⅳ)「圆把平面分为内部(内侧)和外部(外侧)两个部分」等等,在平面上成立的性质是很多的。同样,在(立体的)空

间也成立的性质可以举出很多。

上述性质(i),(ii)在平面上,在(立体的)空间内也成立,(iii)和(iV)在平面上成立,但对(立体的)空间内不一定成立。在(立体的)空间,二直线是异面的情形,(iii)就不成立,显然(iV)不成立。

这样,既使是(欧几里德)图形的性质,必须注意与图形所在的空间无关的那样性质(i),(ii)和必须考虑与它所在空间有关联的性质。

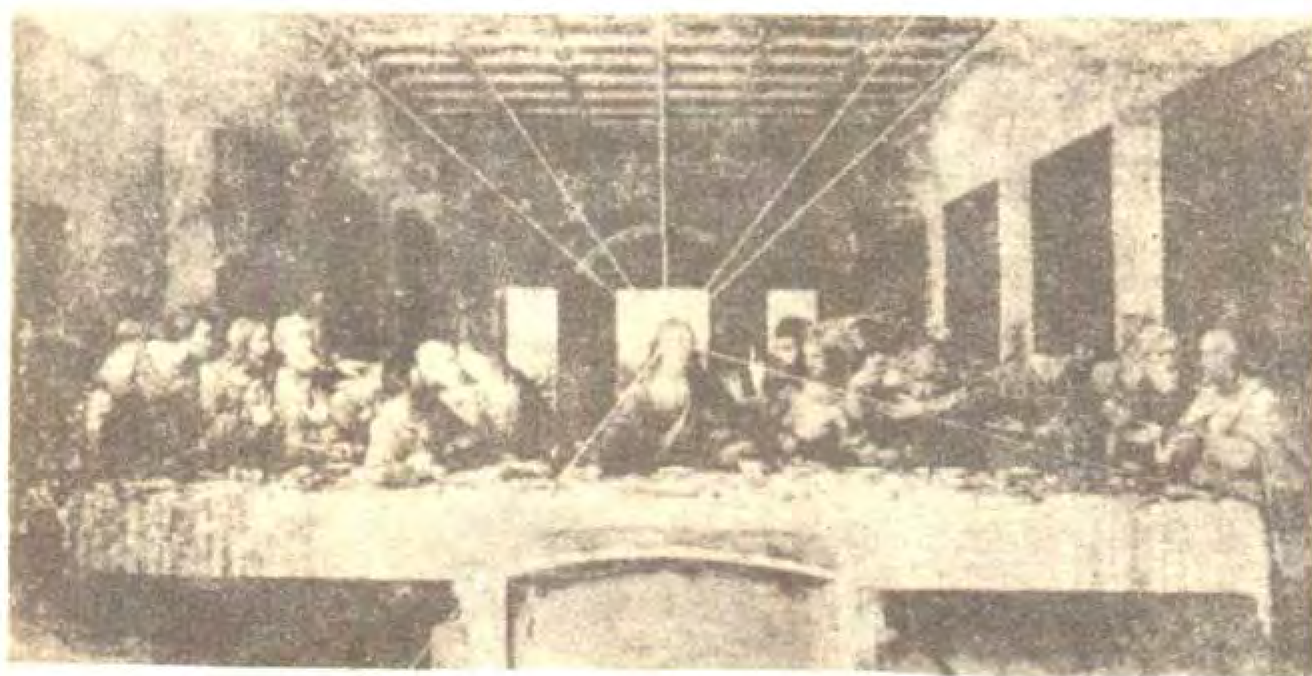


图 37 列昂纳德·达·芬奇画的「最后的晚餐」:美丽而且立体感很强

因此,所谓研究图形的性质,要区别是连图形所在空间一起考虑,还是不涉及空间,仅考虑图形。从而,对图形进行研究时,可知空间是起着很重要的作用。为此,在所考虑的空间中,以所依据的事项为基础,对某性质的成立必须进行逻辑的探讨。

第Ⅲ章　坐标的几何学

§1　图形与数式的统一

（1）　笛卡尔的思想



在十七世纪法国的笛卡尔(1596～1650)以坐标的思想为基础而构成了新的几何学，这个几何学对后来数学的发展起了很大作用。他不仅是数学家，也是著名的哲学家，甚至是近代哲学的祖师。

笛卡尔的思想是对各种事物都深入的揭示它的本质进行研究。他的关于研究方法的著名著作『方法概论』中曾有以下的论述。

第一，不论什么事物，如果自己没有明确地认为它是真理时，则不能认为它是真理。

第二，自己所要研究的各种难题，尽可能地，并且为了更好地解决它，根据需要把它分解成很多小的部分来研究。

第三，从最简单，最容易的事物开始，一步一步地分段追查，逐渐地从多方面去理解它，在这个基础上，要考虑对于那些前后无关系的事项之间的顺序，同时要建立起按自己的思想方法的顺序。

第四，自己要无遗漏地，认真地，列举出所能考虑到的全部问题，以增加研究的幅度。

这样，笛卡尔把既使是以前他已经掌握的事实，在没有通过他自己思想理解以前，采取彻底调查研究的态度，特别是象第二条中所说的那样，对每件事物进行研究时，尽量地把它分解成各个细小部分进行思考，把这种思想方法用于研究图形，把图形尽量地分解为简单地，也就是分解为点来考虑。他总是抱着这种观点，即对各个点的位置用(x, y)这样**坐标**形式来表示。而且他在研究图形性质的同时也把空间作为问题，总考虑图形在空间中所占有的位置。由于他具有这种想法，所以不仅是直线和圆，而且也考虑比曲线还要广泛的图形。

（2） 图形与数式的统一

关于坐标的思想可以说在希腊时代已经开始使用。阿基米德以及阿普罗纽斯在研究圆锥曲线中，在10页已有所叙述。

希腊人已经知道选用坐标轴把圆锥曲线表示成方程。但是希腊人只知道 x, y 表示线段长度，xy 表示边长为 x 和 y 的长方形的面积，而 x^3 表示边长为 x 的立方体的体积，而且常与图形结合来考虑。这样不能计算 x 与 x^2 的和，因为长度与面积不能相加！

可是，到十七世纪，各种符号已经比较完备，巧妙地利用这些符号，使运用计算的代数与处理图形的几何向着结合的方向发展。法国的费尔马（1608～1665）终于首先提出点的坐标的思想，而开创了坐标的几何学。但是，费尔马也象前面提到的希腊人一样，因为只是把文字与图形结合起来来考虑，没有得到新的发展。



图 2　费尔马

笛卡尔考虑文字不仅表示线段的长度、图形的面积和体积，它还表示图形大小的数值。即他考虑文字可以表示所有的数值。这样前面说过的 x 与 x^2 的加法是有意义的。笛卡尔的思想方法是高超的！他还给线段定方向，考虑了所谓数直线，推广了由坐标思想表示点（1）所提出的方法。由这种坐标思想，象上图那样，使图形与方程

直线……………	一次方程
圆・抛物线	
等圆锥曲线……	二次方程
图形…………………	方程

美妙的对应起来，几何与代数统一起来。象这样把某种观点或方法不同的事物统一起来，在数学中也是很重要的。坐标的思想，把函数用图象来表示，这不仅在数学中，就是对自然科学的发展也是起着巨大的作用。

§2 坐 标

笛卡尔的几何学中谈到怎样确定空间点的位置的问题，从而应从怎样表示点的位置的问题开始。

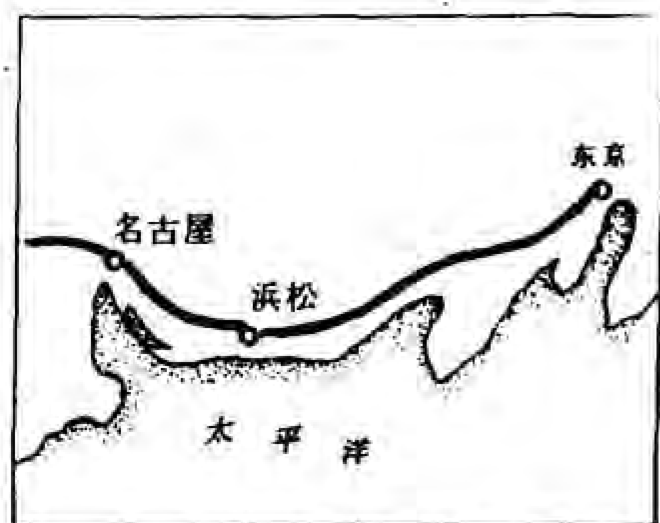


图 3 东名高速铁路

（1） 直线上点的坐标

〖**直线上点的坐标**〗图3是连接东京与名古屋的东名高速铁路。这条路上的浜松距东京 229.5 km。其它的任何地点，若以世田谷作为变换的起点，测出到东京的铁路里程。即，只要在东名高速铁路上确定一个地点，则从东京到该地点的铁路里程就确定了。

反之，如果从东京出发确定了里程，则仅仅确定与东京距离为已知里程的地点。

从而在东名高速铁路上，某地点和以东京为起点到这个

地点的路程之间是一一对应的。

但是，某地点和某起点到这个地点的路程是一一对应的的根据是什么？因为东名高速铁路是用一条线表示的。

在一条线上，不论这条线是曲的或者是直的，上述事实都成立。

那么，在下面，把这个事实在直线上详细地加以讨论。

给定直线 l，即在直线 xx' 上，取定作为基准的一点 **O**，这时把 **O** 叫作**原点**。其次，还在直线 l 上取一点 **E**（一般取在点 o 的右侧）使 **OE** 的长度等于 1。并且把 **E** 叫作**单位点**。

如此，直线 l 由点 **O** 分成左、右侧两部分，单位点 **E**，一般都取在右侧，**E** 在 **O** 的右方（即从 **O** 看是 x 的方向）取为**正方向**，不含 **E** 的是 **O** 的左方（从 **O** 看是 x' 的方向）取为**负方向**，这样来确定直线的方向。

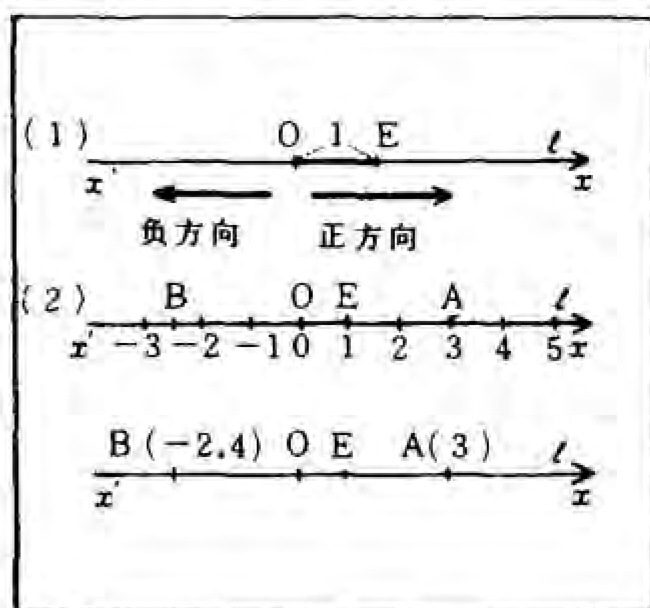


图 4　点的坐标

于是，在直线 l 上任取一点 **P** 时，设 **OP** 的长度是 **OE** 的 x 倍。换句话说，设 $\mathbf{OP} = x \cdot \mathbf{OE}$。但这时的 x，如果 **P** 对 **O** 来说在 **E** 的同侧（右侧）时为止，**P** 对 **O** 来说在 E 的反侧（左侧）为负，这样 x 是具有符号的值。这时把 x 叫作点 **P** 的**坐标**，记作 **P**（x）。例如图 4 的点 **A**，**B** 分别表示为

A（+3），**B**（−2.4），这个 **A**（+3）也简记作 **A**(3)。当然原点 **O**的坐标为 **O**，单位点 **E** 的坐标为 1，记作 **O**（**0**），**E**（**1**）。

象上面那样，

直线 l 上的点 **P** 与直线 l 上点 **P** 的坐标 x，

它们互相之间有以下关系，如果有一方确定，则另一方也随之而确定。这样在直线上引进坐标的坐标直线，再与前面所说的数轴联系起来就可以了解了吧！

现在，已经考虑了**数直线**上点的坐标，利用这个坐标就可以表示直线上的各种部分。即，把直线看作点的集合，它的子集可以用坐标表示。

在第Ⅱ章的§4的(2)中已经提过，直线可由一点分成两个部分。现在象图 5 那样，在直线上任取一点 **A**（**4**），设 l 上任意为 **P**（x）。这时，x 满足下列条件：

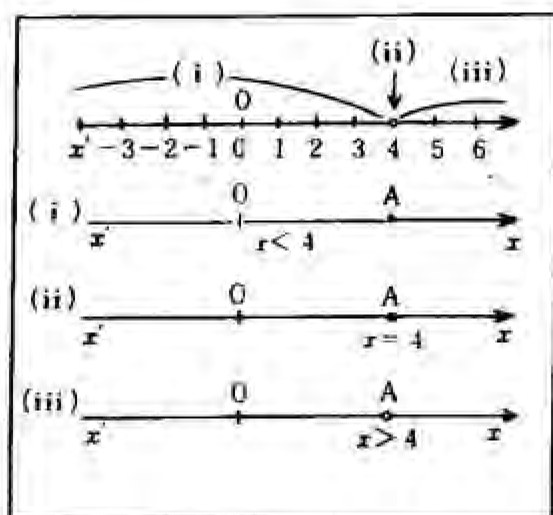


图 5　直线由一点分为两个部分

（i）　$x < 4$

（ii）　$x = 4$

（iii）　$x > 4$

的点 **P**（x）的范围(集合)，分别如图 5。这时，（i）的红色部分不包含右端点，(iii) 红色部分不包含左端点，这样对不包含的点用小圈来表示，对包含的情形用黑点来表示。

从上面的事实可知，在直线 l 上取一点**A**(4)并把它去掉，这样就象图6(iv)，把直线分割成**A**的左侧和**A**的右侧两个部分。如果，这时考虑**A**包含在**A**的左侧成为它的右端点和其余部分，则得到(v)。又，如果考虑**A**包含在**A**的右侧部分和其余部分时，则得到(vi)。如果把直线分割成左和右两部分时，必为(v)或(vi)的二者之一。这一事实表示了，如同在前一章§4中所说的直线无空隙的重要性质。象图6(v)的左侧部分或(vi)右侧部分那样，包含端点的直线的那侧叫作以端点为始点的**射线**。

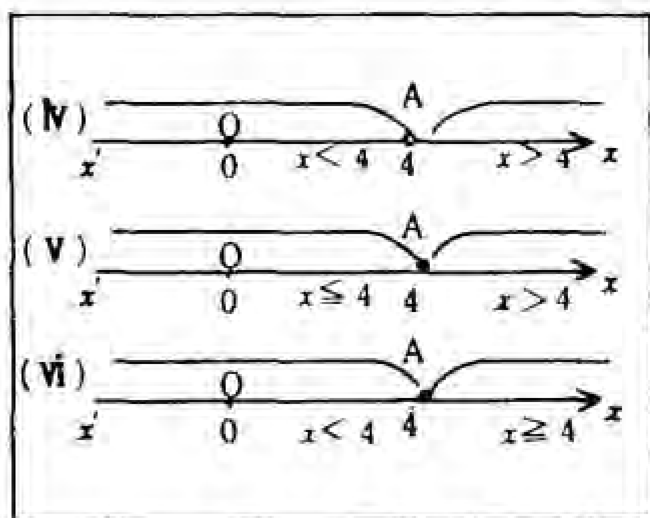


图6　直线无空隙

其次，考虑满足条件 $-2 \leqslant x \leqslant 4$ 的 x 为坐标的点**P**(x)所在的范围，如图7(i)的红线部分，成为从点**A**(−2)到点**B**(4)的直线上的点集。

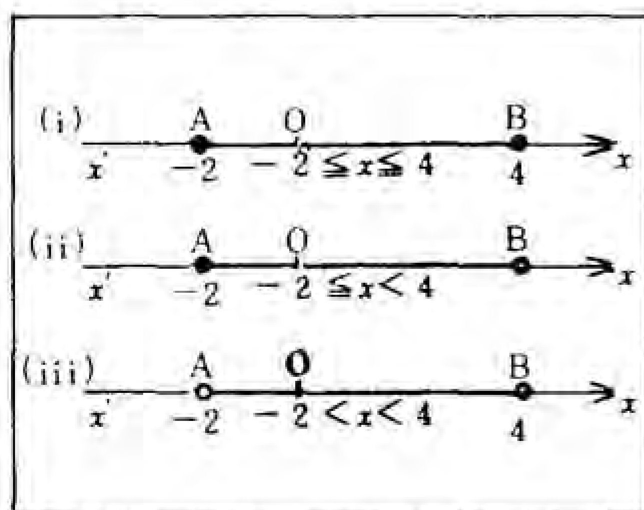


图7　线段AB

这样，在直线上由两点和它们之间的所有点构成的点集叫作**线段**。如果两个点是**A**,**B**，则叫作线段**AB**，或线段**BA**。

(但是，有时如图7的(ii)或(iii)，考虑至少有一方

不包含端点的情形，这时也把它叫作线段AB）。

〖二点间的距离〗考察夏日的气温时，前天是23℃，昨天是27℃，今天是31℃，逐渐热起来。如果以昨天气温为基准来考虑，前天和今天都与昨天的气温相差4℃，而前天比昨天低4℃，而今天比昨天高4℃，高低相反。

从这个气温的例子中看到，只考虑仅相差4，把仅小4或仅大4的这个事实放在直线上来考虑。

在坐标直线上，设点**A**为**A**(27)时，比坐标27小4的点用**B**(23)，比坐标27大4的点用**C**(31)来表示。

点**B**(23)与点**C**(31)都与点**A**(27)的距离为4，**B**在**A**的左侧，**C**在**A**的右侧，它们在距**A**点相反的方向上。为了表示这种意义，把线段的方向也放在一起来考虑，从点**P**到点**Q**的线段连方向也考虑在内时，把它叫作**有向线段PQ**。关于有向线段的方向规定为：

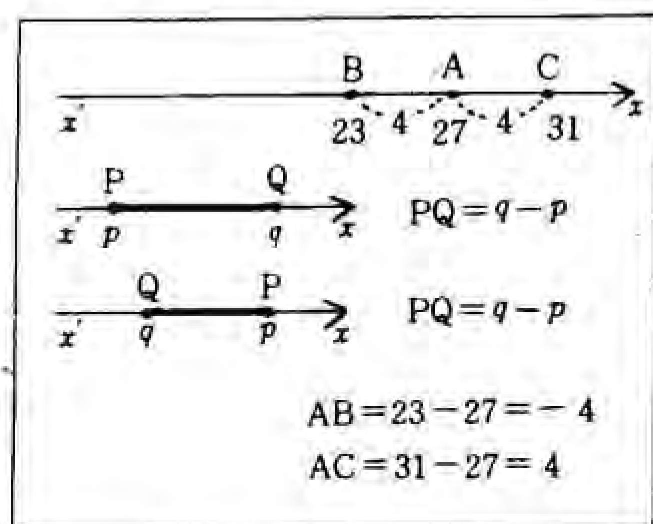


图8 有向线段的长度

· 如果从**P**到**Q**的方向为**正方向**（向右）时，则有向线段**PQ**是正向的。

· 如果从**P**到**Q**的方向为**负方向**（向左）时，则有向线段**PQ**是负向的。

因此，如果**P**（p），**Q**（q）时，则**有向线段PQ的长度**为

$$\mathbf{PQ}=(\mathbf{Q}\text{的坐标})-(\mathbf{P}\text{的坐标})=q-p。$$

从而，也可以说 $\mathbf{PQ}=-\mathbf{QP}$。

物体的长度、面积以及体积，通常不取负值，对上面有向线段的长度来说，只须注意在正向时有向线段的长度是正数，负向时有向线段的长度是负数。

在前页的图 8 中，对于前天比昨天气温低 4 ℃，可以考虑从 **A** 到 **B** 的有向线段的长度为 $\mathbf{AB}=23-27=-4$，同样，可以考虑从昨天到今天的气温的变化为 $\mathbf{AC}=31-27=4$。

如果仅求直线上两点 **P**，**Q** 之间的距离，只求线段 **PQ** 的长度就可以。在这里因为从 **P** 到 **Q** 的距离与从 **Q** 到 **P** 的距离相同，这样就没有必要考虑线段 **PQ** 的方向了。因为线段的长度不取负数，则点 **P**（p）与点 **Q**（q）之间的距离。即线段 **PQ** 的长度，可用两点坐标的差的绝对值

$$\mathbf{PQ}=|q-p|$$

来求得。

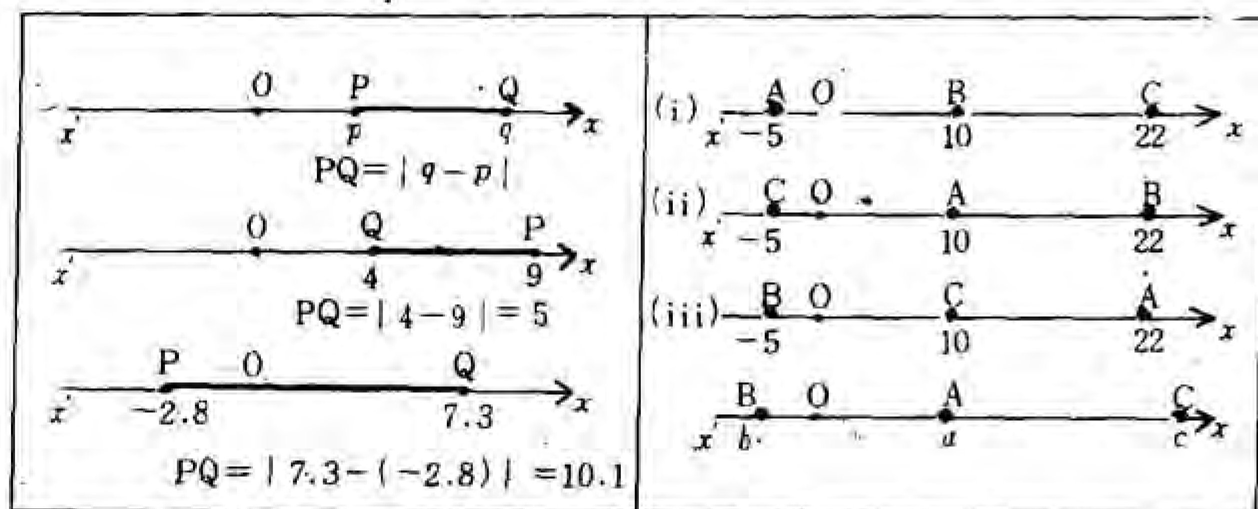


图 9　线段的长度　　　　图 10　AB＋BC＝AC

但是，为了求两点间的距离，象现在这样只须求出连接两点的线段的长度就可以，如果象前面那样考虑具有方向的线段，所谓有向线段时，那么理论的根据又是什么呢。

现在，在坐标直线上取三个点 **A**(a)，**B**(b)，**C**(c)，考虑有向线段**AB**，**BC**，**AC**时，我们将指出

$$\mathbf{AB}+\mathbf{BC}=\mathbf{AC}$$

常成立。这时，直线上三点**A**，**B**，**C**的不同排列很多。在图10中仅举出（i）、（ii）、（iii）三种情形为例，对它们各种情形论证上面公式都成立是很麻烦的。可是，对于有向线段的长度已知为 $\mathbf{AB}=b-a$，$\mathbf{BC}=c-b$，$\mathbf{AC}=c-a$。总是可以简单地得到

$$\mathbf{AB}+\mathbf{BC}=(b-a)+(c-b)=c-a=\mathbf{AC}。$$

这种思想方法，对于不论多少个点都成立，是比较方便的。

在数学中，象这样尽可能的对于能用**同样思想和同样方法求得出的问题，综合地处理是很重要的。这样作，可以作到手续简捷，节省劳力**而且**巧妙地**求得所要求的结果。

注意，今后单称线段**AB**，有时也指的是有向线段**AB**。

〖线段的分点〗 试求连接坐标直线上点**A**（a）和点**B**（b）的线段**AB**，按 $m:n$ 的比分割的分点**P**（x）的坐标。

因为，所谓把线段**AB**按 $m:n$ 的比分割的分点**P**是

$$\mathbf{AP}:\mathbf{PB}=m:n$$

所以

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\frac{x-a}{b-x}=\frac{m}{n}$$

……………………①

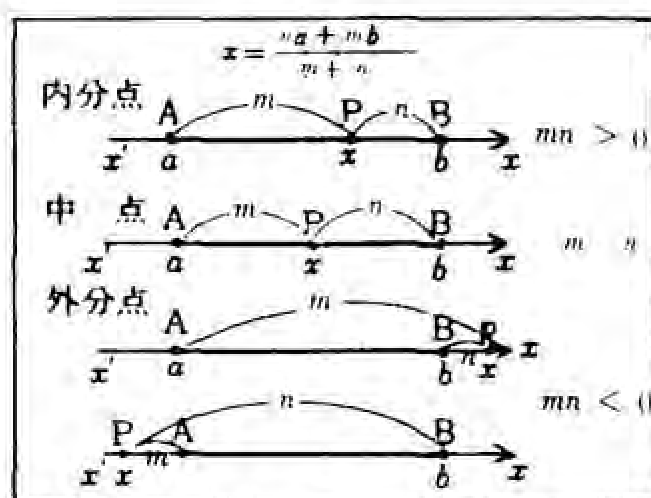


图 11 把线段 AB 按 m : n 分割的分点 P

从而

$$n(x-a)=m(b-x)$$

脱去括弧计算后则得

$$x=\frac{na+mb}{m+n}$$

……………………②

在这个式子中，特别是当 $m=n$ 时，P 是 AB 的中点，所以 AB 中点的坐标为

$$x=\frac{a+b}{2}。$$

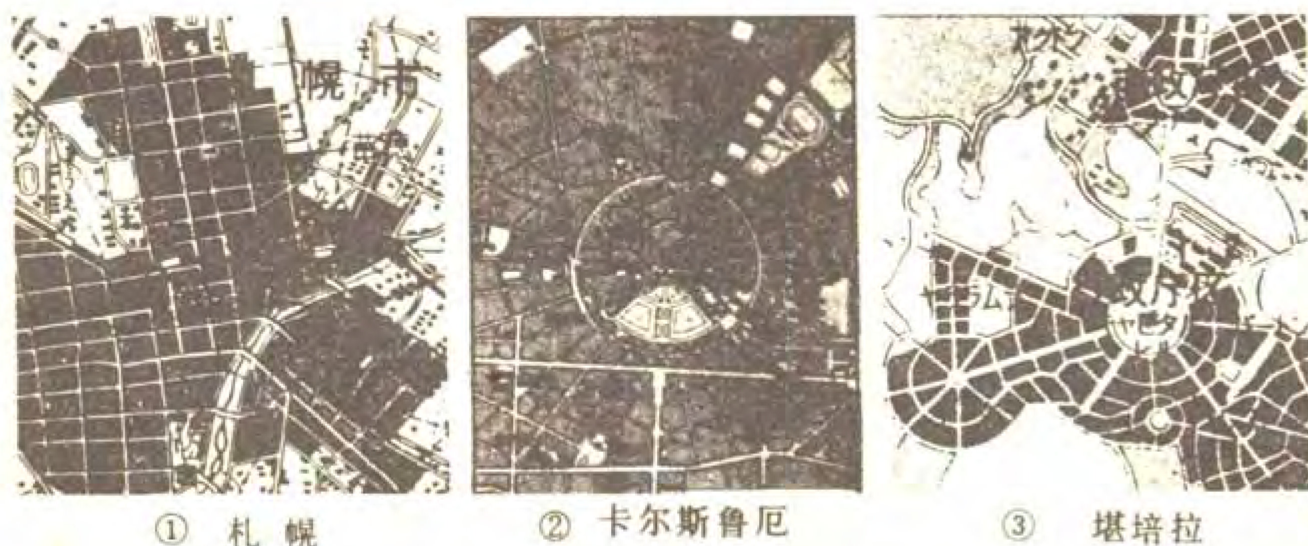
在①式中，如果 m 与 n 符号相同，即 $m\cdot n>0$，因为线段 AP 与 BP 方向相同，所以 P 在 A 与 B 之间。这时说点 P 把线段 AB 按 $m:n$ 内分，P 叫作 AB 的内分点。以同样的想法，如果 m 与 n 异号，即 $m\cdot n<0$，因为线段 AP 与线段 PB 方向相反，则 P 在线段 AB 或 BA 的延长线上。这时，说点 P 把线段 AB 按 $m:n$ 外分，P 叫作 AB 的外分点。

（2） 平面上点的坐标

表示平面上点的位置方法很多。如都市的区域图等，为

了便于知道某地方的位置而划分区域，对于地址或住所可以很准确地用数字或记号来表示，这样首先对访问、旅行的人以及邮递员等等都比较方便，还有在其他方面也很方便。

关于都市的区域图，例如京都、札幌等那样将区域划分为棋盘形，如莫斯科、卡尔斯鲁厄（西德）是以某点为中心将区域划分为放射形。又如堪培拉（澳大利亚）那样是同心圆与放射形的组合以及象华盛顿那样是棋盘形与放射形的组合等等的各种形式。



① 札幌　② 卡尔斯鲁厄　③ 堪培拉

图 12 各种都市的区域图

那么，在数学上是怎样作的呢。

〖直角坐标〗在平面上表示点的位置的最简易的方法是前页例子中的棋盘形的情形。例如，教室中某人的座位或长方形剧场的座位等，如从窗户数第五行，从前面数第三号，这样从左右和前后就可确定一个位置。

可是，如同前面（1）中所考虑过的，由原点和单位点所

确定的两条数轴为 $x'Ox$、$y'Oy$。这两条数轴象图13那样，使原点一致而且互相垂直，把数轴 $x'Ox$ 叫作**X轴或横轴**，$y'Oy$ 叫作**Y轴或纵轴**，把 x 轴，y 轴合起来叫作**直角坐标轴**，在 x 轴，

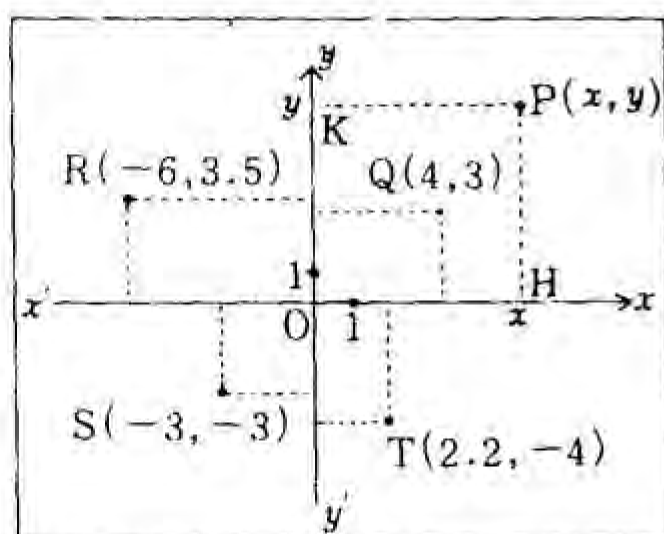


图 13 平面上点的坐标

y 轴上从 O 到 Ox，Oy 的方向分别叫作正方向。

现在，从这个平面上的任意点 **P** 向这两个坐标轴所引垂线的垂足各为 **H**，**K** 时，则

OH $= x$，　**OK** $= y$

确定数 x 和 y。因此，平面上的点 **P** 和数对（x，y）一一对应。这时，把（x，y）叫作**点 P 的直角坐标**或简称**点 P 的坐标**，写作 **P**（x　y）。

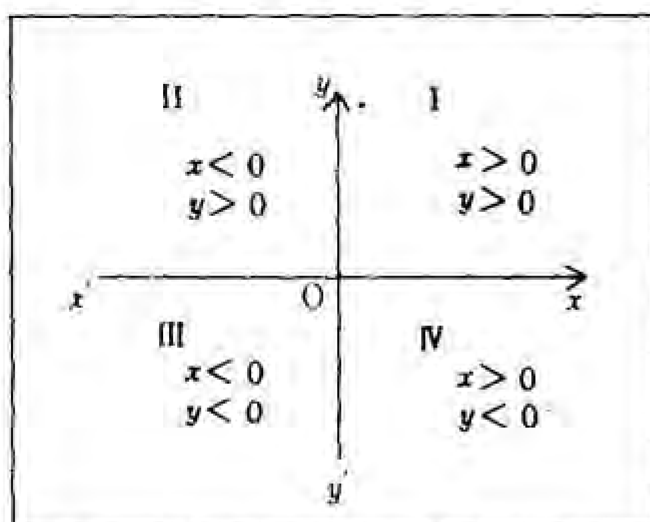


图 14 平面被坐标轴分成 4 个部分

又，这时把 x 叫作点 **P** 的 **X 坐标**，或**横坐标**，y 叫作点 **P** 的 **Y 坐标**或**纵坐标**。在图13中，点 **R** 的 x 坐标是 −6，y 坐标是 3.5。

象图14所表示的，平面由 x 轴和 y 轴分割为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 四个部分（四个象限）。随着点在那个部分来确定点的 x 坐标，y 坐标的正，负。

注意不要把坐标符号搞错。

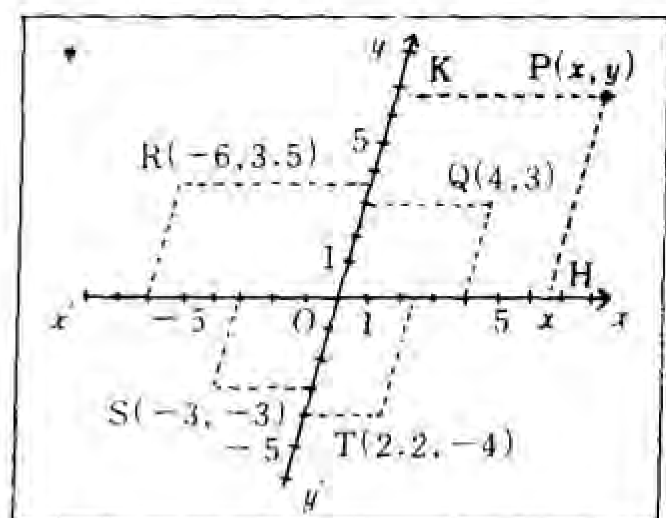


图 15 斜交坐标

〖其它的坐标〗 表示平面上点的位置，在前面已经提到有各种方法。

例如两数轴 $x'Ox$，$y'Oy$ 斜交于点O，则图13成为图15。它还是使平面上的点P与坐标（x，y）之间一一对应。这样表示点的位置的坐标叫作**斜交坐标**。据说笛卡尔开始所考虑的坐标就是这种坐标。

在前面曾提到的西德卡尔鲁斯厄的放射形区域图，怎样来确定地点的位置呢？

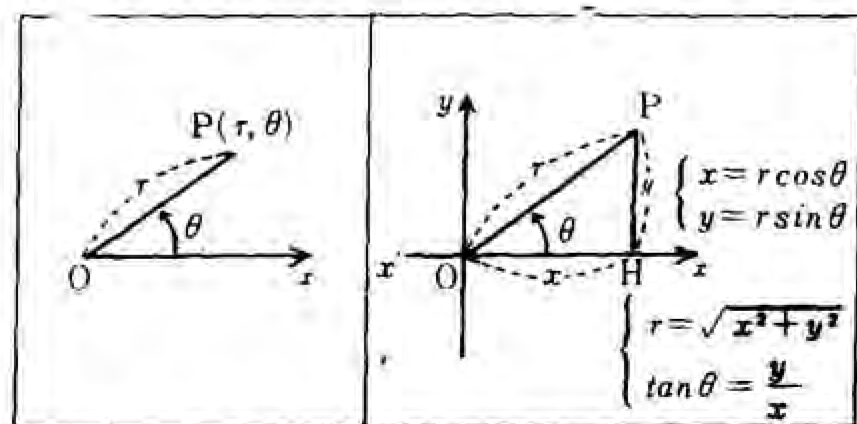


图 16 极坐标　　图 17 直角坐标与极坐标的关系

首先确定从O出发的射线 ox，任意点P的位置可以由线段OP的长度和OP与射线 Ox 的夹角的大小来表示。即如图16那样 $OP = r$（$r \geqslant 0$）和设 $\angle xOP = \theta$，则点P与 r 和 θ 组成的序对（r，θ）一一对应。

这个（r，θ）叫作点P的**极坐标**，用P（r，θ）表示。在这个极坐标中，O叫作极点，射线 Ox 叫作始线。OP 叫作

P 的**动径**，$\angle xOP$ 叫作 **P** 的**偏角**。动径 **OP** 的长度 r 常 $r\geqslant0$，偏角是从始线开始逆时针方向作为它的正方向。

现在，如果取极点 **O** 为原点，包含始线 Ox 的直线为 x 轴，象图17那样把它看作直角坐标，利用直角坐标和极坐标之间的三角比，则得下列关系。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

从前面的（1）和这个（2）所学得的事实可知直线上点的位置可用作为坐标的一个数（x）表示。平面上点的位置，无论直交坐标（x, y），斜交坐标（x, y）以及极坐标（r, θ）都是用两个数的序对来表示。同理，对（立体的）空间内的点 **P** 如果用直交坐标来表示时，象图18那样，则可以用三个数 x，y，z 的数组 **P**（x, y, z）来表示。

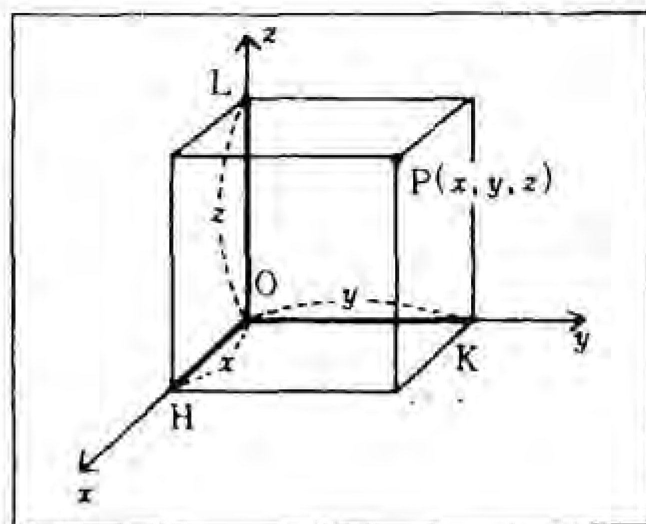


图 18 （立体的）空间的点的位置

上面的事实，表示了直线，平面和（立体的）空间在**广阔方面的差别**，这样就可以理解在27页中所说的把它们叫作 1 维空间、2 维空间、3 维空间的意义。因此，坐标的思想对理解空间是很重要的。

以后除特别说明外，都将在平面上直交坐标系中进行叙

述。

〖线段的分点〗 设已知平面上两点 **A**(a, b)，**B**(c, d)，把连接这两点的线段 **AB** 按 $m:n$ 的比分割的分点为 **P**(x, y)时，试求 **P** 的坐标 x 和 y。

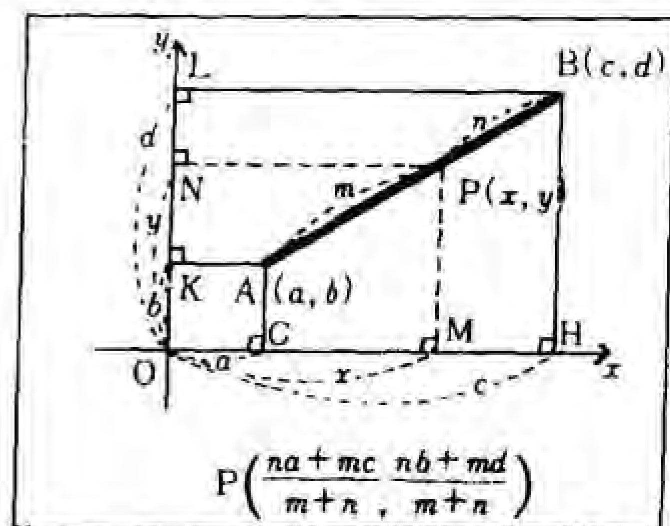


图 19 线段 AB 按 m : n 分割的分点P

对于 x 坐标和 y 坐标，可以用前面（1）中在直线上的思想方法；从图19可知

x 坐标是 **AP** : **PB** = **GM**: **MH** $= m:n$

因为 **GM** $= x-a$，**MH** $= c-x$，则 $x-a:c-x=m:n$

所以 $$x=\frac{na+mc}{m+n}$$

y 坐标是 **AP** : **PB** = **KN**: **NL** $= m:n$

因为 **KN** $= y-b$，**NL** $= d-y$，则 $y-b:d-y=m:n$

所以 $$y=\frac{nb+md}{m+n}$$

从而 $$\mathbf{P}\left(\frac{na+mc}{m+n},\ \frac{nb+md}{m+n}\right)。$$

如果 $m\cdot n>0$，则 **P** 是线段 **AB** 的内分点。如果 $m\cdot n<0$，则 **P** 是 **AB** 的外分点。这与前面直线上情形是相同的。特别是，**P** 是线段 **AB** 的中点的情形，因为 $m=n$，所以线段的中点为

$$P\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)。$$

〖两点间的距离〗 已知平面上有两点 **A**(2, 3) **B**(8,6),

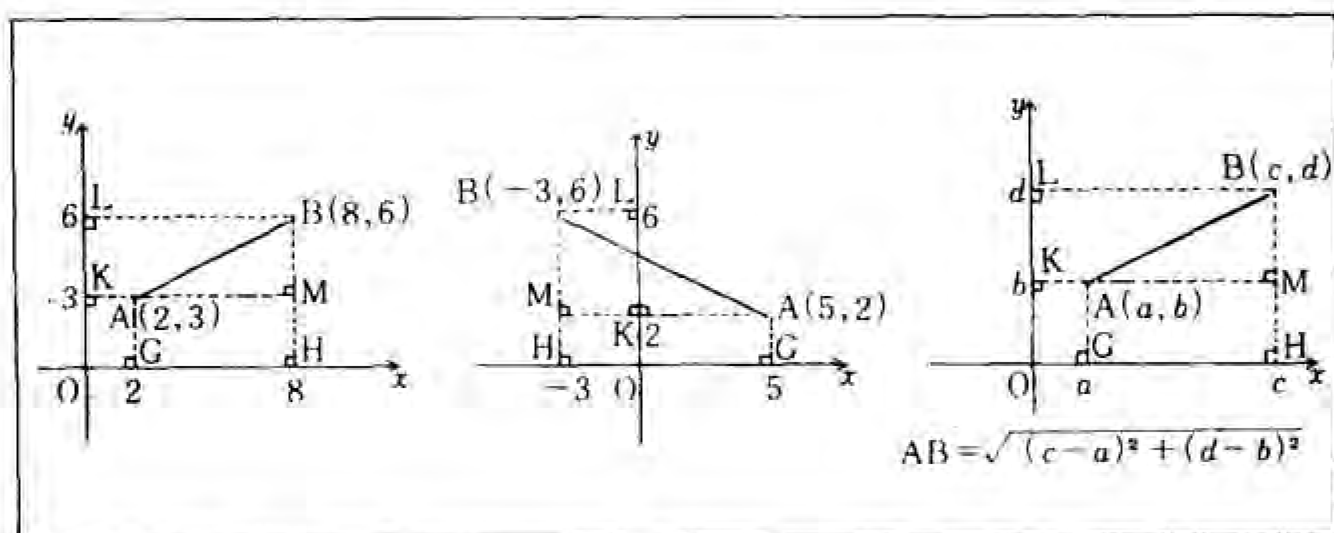


图 20 A与B之间的距离　　　　图 21 两点间的距离公式

试求 **A** 与 **B** 之间的距离，即求线段 **AB** 的长度。

如图20左图，从点 **A**,**B** 向 x 轴，y 轴分别引垂线，设它们的垂足各为**G**,**H** 及 **K**,**L**。延长**KA** 与 **HB**，交点为 **M**。这时，因为∠**AMB** =90°，所以三角形 **AMB** 是直角三角形，对这个直角三角形，利用毕达哥拉斯定理，则

$$AB^2=AM^2+MB^2=(8-2)^2+(6-3)^2$$

$$=6^2+3^2=36+9=45$$

从而　　$AB=\sqrt{45}$　（这个$\sqrt{45}$也可以写作$3\sqrt{5}$）。

这个毕达哥拉斯定理的思想方法无论 **A**,**B** 在平面上的什么位置都可以使用。

在图20的右图中，因为

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 = (-3-5)^2 + (6-2)^2$$
$$= 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

从而 $AB = \sqrt{80}$ （这个$\sqrt{80}$也可以写作 $4\sqrt{5}$）。

从上面的想法可知，象图21那样，一般的两点 A (a, b)，$B(c, d)$间的距离由下面公式求得

$$AB = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

上面，(**1**) 中是关于直线上点的坐标，(**2**) 中是关于平面上点的坐标，对它们进行了阐述。

在阐述(**1**)和(**2**)的问题之间，注意到在思想方法以及其它问题都有相似的地方。注意到对这样**相似的地方**加以考虑时，那么对在52页所提到的空间点的坐标也就可以推导出来，从而也可以推导出空间直线、平面以及球面等等的方程。但有关这些内容在这本书中将不进一步论述。

§3 平面上的直线

在这里，将利用坐标x，y的方程表示平面上各种位置的直线，研究这些直线的位置关系以及与直线有关的应用问题。

(1) 平面上的直线方程

通过两点的直线有一条且仅有一条，从而给定两点则直线完全确定的问题，从前面的空间性质（Ⅰ）已经知道。在这

里我们从考察过两点的直线开始。

〖过两点的直线方程〗 如下图22，设直线 l 通过两点 **A**(2，4)，**B**(7，8)。现在在 l 上任取一点**P**（x，y），则△**AHP** 与△**AKB** 相似。即△**AHP** ∽ △**AKB**。因为两个相似三角形的对应边的边长成比例，所以

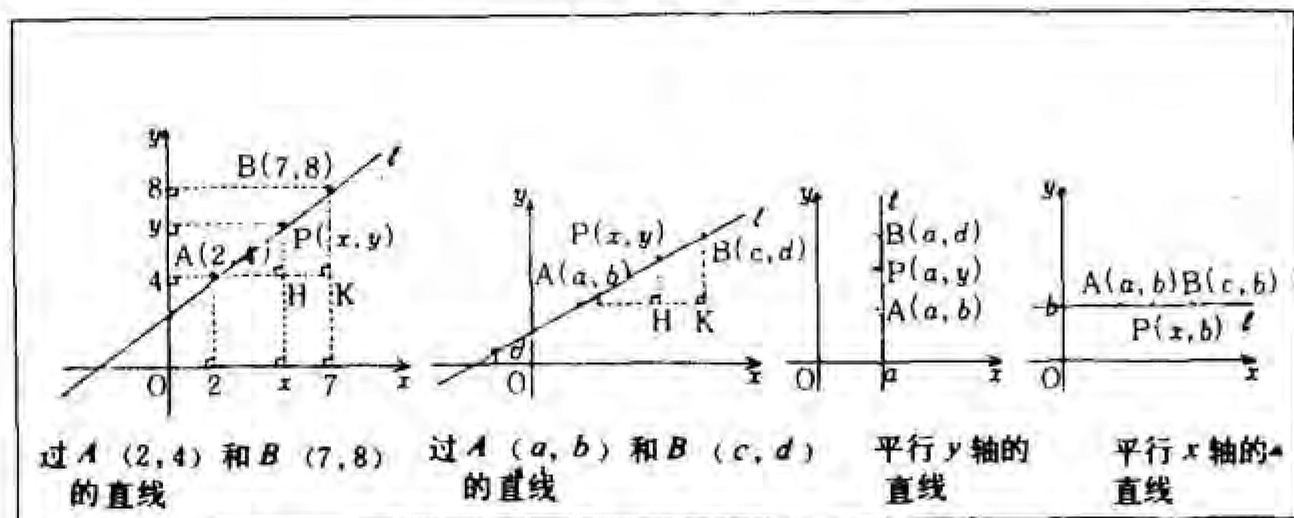
$$\frac{\mathbf{HP}}{\mathbf{AH}}=\frac{\mathbf{KB}}{\mathbf{AK}},\quad 因为\mathbf{AH}=x-2,\quad \mathbf{HP}=y-4;$$

$$\mathbf{AK}=7-2,\quad \mathbf{KB}=8-4,\ 所以上式成为$$

$$\frac{y-4}{x-2}=\frac{8-4}{7-2}\qquad 即\qquad \frac{y-4}{x-2}=\frac{4}{5}。$$

它可以表示为下列的某一个形式的式子。

$$y-4=\frac{4}{5}(x-2),\ y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5},\ \frac{4}{5}x-y+\frac{12}{5}=0。$$



过*A*（2，4）和*B*（7，8）的直线　　过*A*（*a*，*b*）和*B*（*c*，*d*）的直线　　平行 *y* 轴的直线　　平行 *x* 轴的直线

图 22　　图 23　　图 24　　图 25

上面的任何一个方程都被直线 l 上的任意点**P**（x，y）的坐标 x，y 所满足，把它称之为过两点**A**(2，4)和**B**(7，8)

的直线方程。

从上述事实可知，一般地，通过两点 **A**(a, b)，**B**(c, d) 的直线 l（图23）的方程，当

$a \neq c$ 时为　　$y-b=\dfrac{d-b}{c-a}(x-a)$ ………… (i)

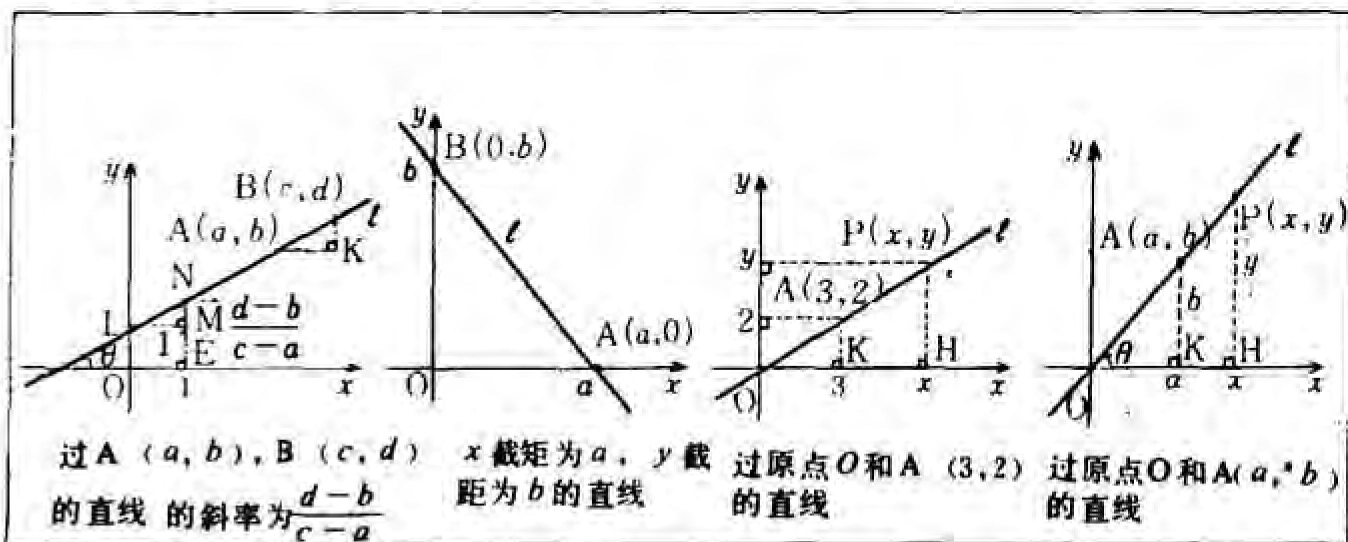
当　$a=c$ 时，直线 l 上所有点的 x 坐标都是 a，所以直线 l（图24）的方程为 $x=a$ ……………………………………… (ii)

特别是 y 轴的方程为 $x=0$ ……………………………………… (iii)

又，$b=d$ 时，因为直线上所有点的 y 坐标都是 b，所以直线 l（图25）的方程为 $y=b$ ……………………………… (iv)

特别是 x 轴的方程是 $y=0$ ……………………………………… (v)

图23，也就是关于图26直线 l 上两点 **A**(a, b)，**B**(c, d)，把 x 坐标差 **AK**$(=c-a)$ 对于 y 坐标差 **KB**$(=d-b)$ 的比 $\dfrac{\mathbf{KB}}{\mathbf{AK}}$，即 $\dfrac{d-b}{c-a}$ 叫作直线 l 的斜率。这个直线 l 的斜率也



过A (a, b)，B (c, d) 的直线 的斜率为 $\frac{d-b}{c-a}$

图 26

x 截矩为 a，y 截距为 b 的直线

图 27

过原点O和A (3, 2) 的直线

图 28

过原点O和A(a, b) 的直线

图 29

可以看作，当 x 轴进行单位1的变动时，相应地 y 坐标变化的大小。如果直线 l 与 x 轴正方向的夹角为 θ，则在直角三角形 **AKB** 中，因为

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{d-b}{c-a}$$ 所以 l 的斜率也可以是 $\mathrm{tg}\,\theta$。

其次，过两点 **A**$(a,\ 0)$，**B**$(0, b)$ 的直线 l（图27）的方程，利用（i）式，则

$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$。把它整理后得 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$……

（vi）。这个直线方程中的 a, b 是直线 l 与 x 轴交点的 x 坐标，与 y 轴交点的 y 坐标，各称之为 l 的 **x 截距**，**y 截距**。

例如，过点 **A**$(3,\ 0)$ 和点 **B**$(0,\ 5)$ 的直线，即 x 截距为3，y 截距为5的直线方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$。

〖过原点的直线方程〗 当提到过两个点的直线时，考虑其中一个点是原点的情形。

例如，过原点 **O**$(0,\ 0)$ 和点 **A**$(3,\ 2)$ 的直线 l，由图28可知，因为 $\triangle$**OHP** $\backsim$ $\triangle$**OKA**，所以

$$\frac{\mathbf{HP}}{\mathbf{OH}}=\frac{\mathbf{KA}}{\mathbf{OK}} \quad 即 \quad \frac{y}{x}=\frac{2}{3}。$$

它可以表示为　$y=\frac{2}{3}x$　或　$2x-3y=0$，

同样，一般地过原点 **O**(0，0)和点 **A**(a，b)的直线 l（图29）的方程为

$$y=\frac{b}{a}x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(vii)}。$$

因为这条直线 l 的斜率为$\frac{b}{a}$，设这个斜率$\frac{b}{a}=m$，则(vii)为 $y=mx$ ………… (viii)，从方程(vii)以及(viii)的形状可知，过原点的直线可以看作是 x，y 成比例时的函数图象，这时的比例常数看作直线的斜率。

〖已知一点和斜率的直线方程〗 过点 **A**(a，b)，斜率为 m 的直线方程，由图30可知，在△**AHP** 中，

因为$\frac{\mathbf{HP}}{\mathbf{AH}}=m$，所以$\frac{y-b}{x-a}=m$，

即 $y-b=m(x-a)$

……………………(ix)。

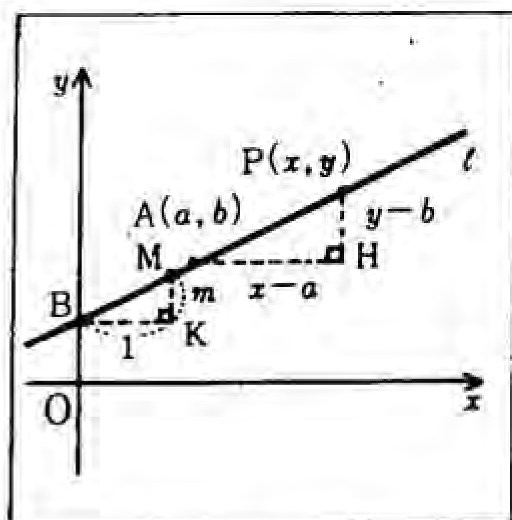


图30 过 A(a，b) 斜率为 m 的直线

特别是，设 y 轴的截距为 d，斜率为 m（即过点 **B**(0，d)，斜率为 m 的直线）的方程，由于(ix)中 $a=0$，$b=d$，所以

$$y=mx+d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(X)}$$

〖直线和一次方程 $ax+by+c=0$〗 直线可由给定两点或一点以及它的斜率完全确定。

从这个事实出发，已经得到上面从(i)～(X)的各

种形状的方程所确定的直线。把这些方程适当变形都可写成 x，y的一次方程 $ax+by+c=0$。

反之，x，y的一次方程

$$ax+by+c=0$$

如果 $b\neq 0$，则可写成

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$，它表示在

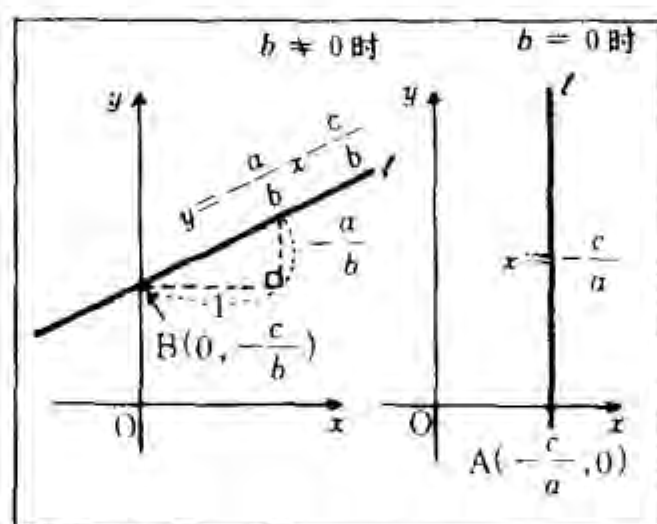


图 31　直线$\Longleftrightarrow ax+by+c=0$

y轴的截距为$-\frac{c}{b}$（即交点 **B**（$0,-\frac{c}{b}$），斜率为$-\frac{a}{b}$的直线，特别是 $a=0$ 时，则

$y=-\frac{c}{b}$，它表示平行于 x 轴的直线。如果

$$b=0,\quad (a\neq 0)\text{ 则 }\quad x=-\frac{c}{a}$$

它表示平行于 y 轴的直线。

总之，上面的关系式 $ax+by+c=0$ 可以表示 $y=mx+b'$，$x=a'$ 或 $y=b'$ 形的直线。

象上面那样，利用坐标 x，y，直线 l 可以用 $ax+by+c=0$ 形的一次方程来表示。又，当把这个方程看作 x，y的条件式时，则满足这个条件的点**P**（x，y）的集合构成直线 l。即已知　$l=\{(x,\ y)\,|\,ax+by+c=0\}$。

这样，应用坐标 x，y 时，则

直线……方程 $ax+by+c=0$

可使图形直线与数式的一次方程之间巧妙地一一对应起来。

（2） 直线的位置关系

在前面已经知道，平面上直线方程是 $ax+by+c=0$，或者把它按 $b\neq0$，$b=0$ 变形后得

$y=mx+b'$ 或者 $x=a'$ ……………………………（*）

反之，可知形如 $y=mx+b'$ 或者 $x=a'$ 形的方程（满足它的点（x，y）的集合）表示直线。

〖平行的二直线〗 如图32，若直线 l:$y=mx+b$ 与直线 l'：$y=m'x+b'$ 平行时，因为 l 与 l' 的斜率相等，所以

$m=m'$。反之如果 $m=m'$，则 l 与 l' 平行。

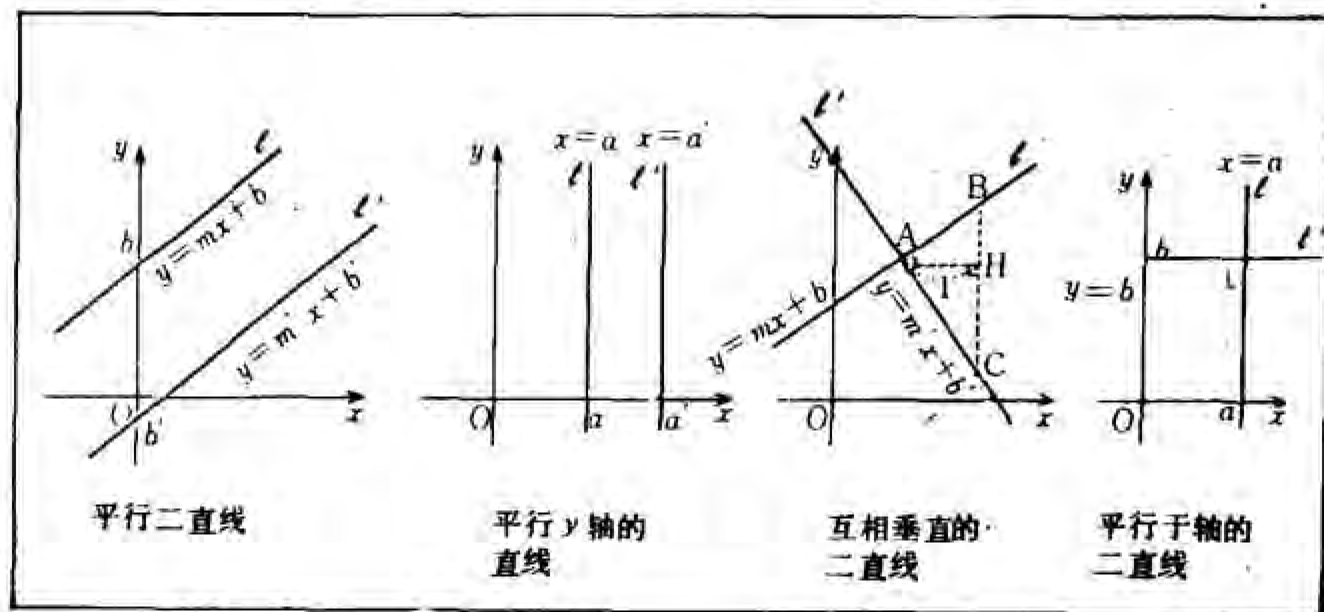


图 32　图 33　图 34　图 35

又如图33，直线 l：$x=a$ 与直线 l'：$x=a'$ 都与 y 轴平

行，所以互相平行。

例如，因为二直线 l: $y=2x+3$和 l': $y=2x-1$的斜率都是2，所以平行。二直线 l: $x=-\frac{1}{2}$与 l': $x=1$都与 y 轴平行。

〖互相垂直的二直线〗 二直线互相垂直时，可就着直线的方程之间的关系来研究它们。

如图34，设直线 l: $y=mx+b$与直线 l': $y=m'x+b'$ 互相垂直。这时，从 l与 l' 的交点**A**向x轴的正方向引长度为一个单位的线段**AH**，通过**H**象图34那样作图，引与**AH**垂直的线**BC**，这时，在△**BAH**与△**ACH**中

$$\angle \mathbf{AHB}=\angle \mathbf{CHA}=90^\circ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{i})$$

又从 $\angle \mathbf{HBA}+\angle \mathbf{HAB}=90^\circ$，$\angle \mathbf{HAB}+\angle \mathbf{HAC}=90^\circ$ 两式得

$$\angle \mathbf{HBA}=\angle \mathbf{HAC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{ii})$$

从(i)，(ii) 得 $\triangle \mathbf{BAH} \backsim \triangle \mathbf{ACH}$，

从而 $\frac{\mathbf{BH}}{\mathbf{AH}}=\frac{\mathbf{AH}}{\mathbf{CH}}$ 即 $\frac{m}{1}=\frac{1}{-m'}$ 从而$mm'=-1$。

又，如果把上面的内容反过来进行考虑，当$m.m'=-1$时，可知 l与 l' 是互相垂直的。

其次，如图35，因为如果一条直线平行于 x 轴（或 y 轴），与它垂直的另一直线与 y 轴（或 x 轴）平行，可知直线 l: $x=a$ 与直线 l': $y=b$ 常垂直。

〖二直线的交点〗 现在研究两条直线在什么情况下有交点，在什么情况下没有交点。已知

直线 l 可以写作，$y=mx+b$ 或 $x=a$，

直线 l' 可以写作，$y=m'x+b'$ 或 $x=a'$。

这时，研究直线 l 与 l' 的交点，可以转化为作为点集的 l 与 l' 的公共部分（交集）的问题。

例如，$l=\{(x, y) \mid y=mx+b\}$ 与 $l'=\{(x, y) \mid y=m'x+b'\}$ 的交点的集合为 $l \cap l'=\{(x, y) \mid y=mx+b\} \cap \{(x, y) \mid y=m'x+b'\}$。

这样的 l 与 l' 的组合，是作为确定点集 l 与 l' 的条件的方程的组合，可由下列 4 种联立方程来研究。

① $\begin{cases} l: y=mx+b \\ l': y=m'x+b' \end{cases}$　　② $\begin{cases} l: y=mx+b \\ l': x=a' \end{cases}$

③ $\begin{cases} l: x=a \\ l': y=m'x+b' \end{cases}$　　④ $\begin{cases} l: x=a \\ l': x=a' \end{cases}$

于是，关于①，②，③，④各种情形的 l 与 l' 的交点的情况，可表示如图36。把这个事实归纳起来，则得

① 直线 l：$y=mx+b$ 与直线 l'：$y=m'x+b'$，当

（i） $m \neq m'$ 时交于 1 点。

（ii） $m=m'$，$b \neq b'$ 时，无交点（l 与 l' 平行）。

（iii） $m=m'$，$b=b'$ 时，有无穷多交点（l 与 l' 重合）。

② 直线 l：$y=mx+b$ 与直线 l'：$x=a'$ 有一个交点。

③ 直线 l：$x=a$ 与直线 l'：$y=m'x+b'$ 有一个交点。

④ 直线 l：$x=a$ 与直线 l'：$x=a'$：

（i） 当 $a \neq a'$ 时，无交点（l 与 l' 平行）。

（ii） 当 $a=a'$ 时，交点有无穷多个（l 与 l' 重合）

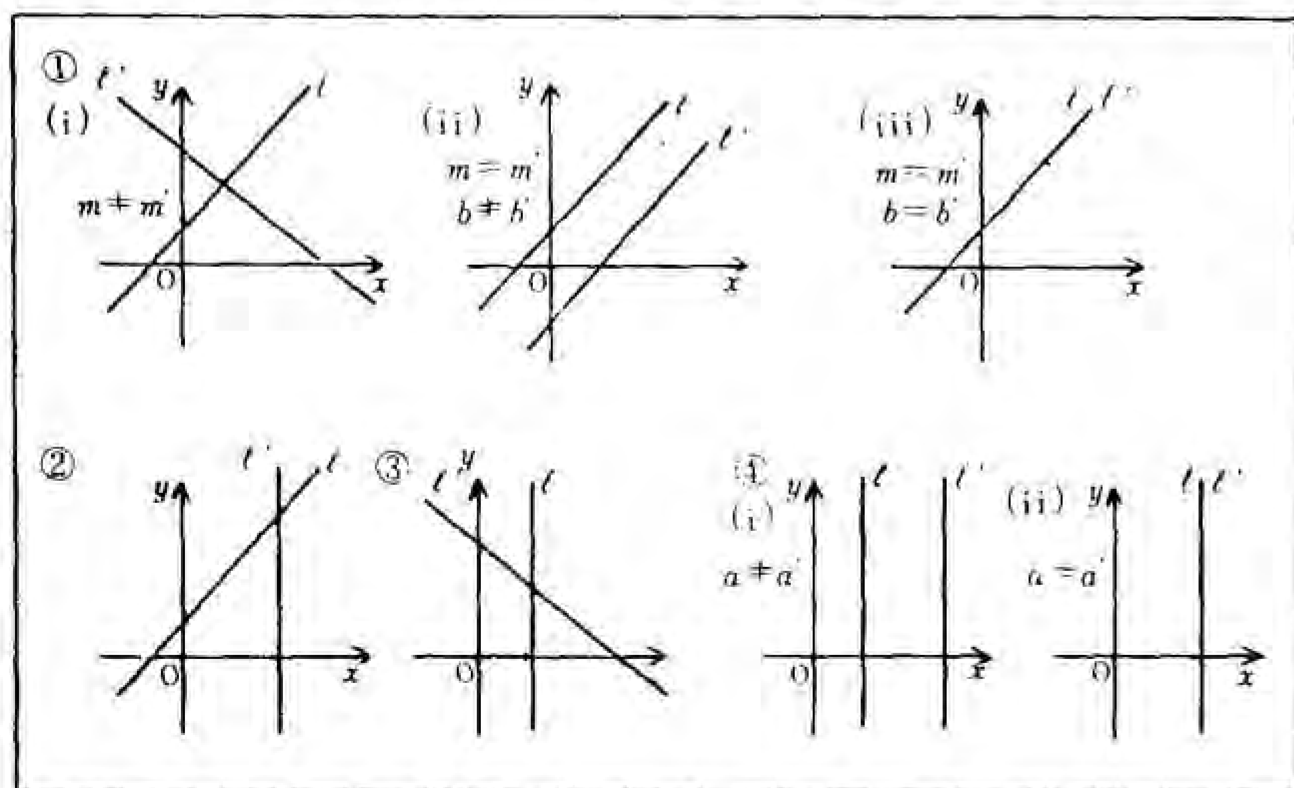


图 36 二直线 l，l' 的交点

在上面，可以把②与③的情形放在一起来考虑，又因为①（iii）与④（ii）的情形是直线 l 与直线 l' 重合的特别情形，所以直线上的各个点都是交点（公共点），因此，交点是无穷多个。

但是，在上面，是以二直线 l，l' 的交点的个数作为问题来研究，实际上，为了求交点的坐标，象81页所说的那样，因为是考虑作为点集 l 与 l' 的公共部分 $l \cap l'$ 的元素，可以由同页的①，②，③，④的联立方程组的解集合来求得。

以上面的事实为基础，试作下面问题。

『山本乘摩托于上午 8 时从家出发到远离30km 的亲戚家去，上午 9 时半到达。次日上午 9 时从亲戚家出发，走来时的路，上午11时到家。去和回来摩托的速度都分别按规定的速度行进。这样，去时和回来时，在同一时间是否通过相同的地点？』

在这个问题中，日期不同，但说在同时刻经过相同的地点，这种事情是可能的吗？

把这个问题用图象来考虑。将时间（x）作为横轴，从家出发路程的里数（y）为纵轴，这样来取定坐标轴。设出发时的家为**H**，亲戚家为**R**，第二天的家为**H′**，亲戚家为**R′**，在同一坐标平面上表示为**H**(8，0)，**R**(9.5，30)而**R′**(9，30)，**H′**(11，0)。因为摩托的速度在去和回来时都有各自的规定速度，这样山本的动态，在图象中，去时可用连接**H**与**R**的直线 l，回来时可用连接**R′**与**H′**的线段 l' 表示。于是可知 l 与 l' 相交。它

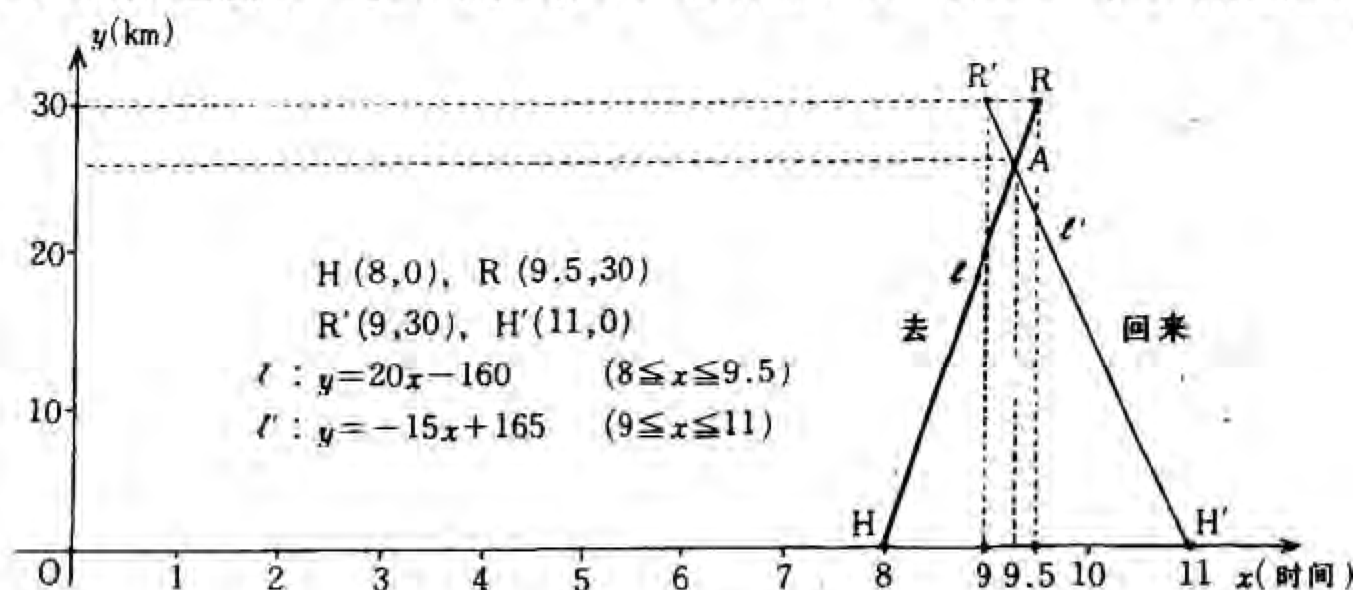


图 37 摩托的问题

们的交点为A，是图37中的 l 与 l' 的联立方程的解，得

A$\left(\frac{65}{7},\ \frac{180}{7}\right)$。从而，如果在9时$17\frac{1}{7}$分从家走到$\frac{180}{7}$km的地点，回来时也必过这个地点（上面的问题是，如果出发与到达时刻和上面相同，则摩托既使不按确定速度也可以作为拓扑思想的例子而这样说）。

§4 以直线为边界的平面区域

（1） 分数大小的比较

〖分数大小的比较〗 现在考虑『把分母为5以下（包括等于5）的真分数$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{2}{4}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{2}{5}$,$\frac{3}{5}$,$\frac{4}{5}$ 按从小到大的顺序排列』这样的问题。怎样考虑比较好？

例如，

分数$\frac{2}{3}$与$\frac{4}{5}$谁大？

在比较两个分数的大小时，有各种方法，下面的方法是常用的方法。

① 变成小数后再进行比较。

② 先通分，然后再比较分子的大小。

由①，$\frac{2}{3}=0.6666\cdots\cdots=0.6$，$\frac{4}{5}=0.8$。

由②，则$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$，$\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$，都是$\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$。

〖用直线的斜率进行比较〗 因为有理数都可以化为两个整数之比的形式，在古代希腊人重视有理数，这已经在7页说过。用分数来表示是表示有理数的方法之一。

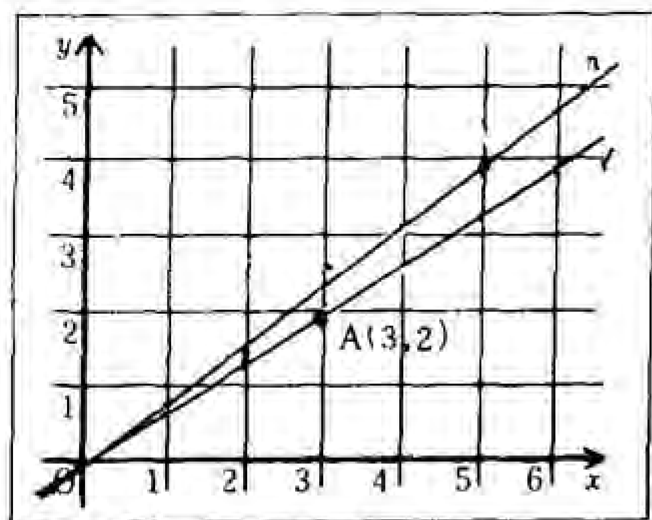


图 36 格子点

分数$\frac{b}{a}$是由分母a和分子b两个事物归纳在一起，作一个事物来表示。这个例子就是其中的一个，象这样，**把几个事物归纳在一起看作一个事物**的这种思想方法，使事物简单化或统一，在前面已经说过，这在数学中是很重要的思想方法之一。

在平面上，把以x，y的数对为坐标(x, y)看作是表示一个点的位置，这种思想方法与上述的思想方法是相同的。

在这种思想指导下，着眼于分数$\frac{b}{a}$是由a，b所组成的，设把分数$\frac{b}{a}$表示为平面上坐标(a, b)那样序对的形式。于是，

在平面上，象图36那样构成平行于两轴的直线族，可知这些交点的坐标，可用整数对来表示。

这样，一般地，坐标用整数对所表示的点叫作**格子点**。下面想用格子点来表示分数。

设分数$\frac{b}{a}$的分母a为x坐标，分子b为y坐标，则分数$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{5}$可分别用点A(3, 2)，点B(5, 4)来表示（图36）。

现在，因为过原点O与点A(3, 2)的直线l的斜率为$\frac{2}{3}$，所以l的方程为$y=\frac{2}{3}x$，又因为过原点O与点B（5, 4）的直线n的斜率为$\frac{4}{5}$，所以n的方程为$y=\frac{4}{5}x$。

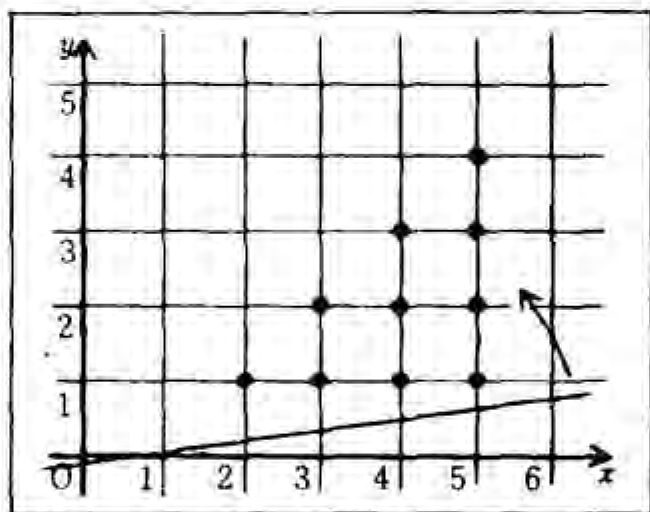


图 37　当直线l旋转时，l与格子点相遇的顺序？

这时分数$\frac{2}{3}$与$\frac{4}{5}$的大小可通过直线l与直线n的斜率的大小来比较。

即，当固定x坐标时，例如取$x=1$时，通过l与n直线在$x=1$上谁有较大的y坐标，即可知分数的大小。

从这个观点出发，对若干个正分数的大小的比较，可以把过原点O的直线，从 x 轴开始，以O为中心，使其斜率逐渐增大而逆时针旋转时，可知这个直线先遇到用格子点所表示的分数比后遇到用格子点所表示的分数小。

因此，在本节开始时提出的问题中的分数，由37图可知

$$\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}\ \left(=\frac{2}{4}\right)\ <\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}\cdots(*)。$$

在上面只是就着分母为5的正真分数作了研究。试对分母是7时，仿上述情形列出其真分数。

现在，在上面(*)那样按大小顺序排列的分数中，任取相邻二分数，则(第一个分数的分母)×(第二个分数的分子)－(第二个分数的分母)×(第一个分数的分子)的结果恒相等。这是为什么？

（2）以直线为边界的区域

〖由直线划分的正区域、负区域〗 关于$\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$的分数的大小关系，在前面已经利用直线的斜率进行了研究。那时，在图36中点B(5，4)在直线 $y=\frac{2}{3}x$ 的上方。

但是，如果把点B(5，4)的 x 坐标5和 y 坐标4分别代入直线 l 的方程的右边项$\frac{2}{3}x$ 的 x 与左边项 y，且比较大小时，

则 $4 > \frac{2}{3} \times 5$。

这个事实是当 $x=5$时，即在直线 $x=5$上，点B的y坐标 4 比直线 l 上 y 的坐标$\frac{2}{3}\times 5$大，从而表示点B 在 l 的上方。同理，不仅对 $x=5$ 这样的直线，就是对所有平行于 y 轴的直线都可以这样说。

即，对于直线 l：$y=\frac{2}{3}x$，点 $P(a, b)$ 在 l 的上方时，则必是 $b > \frac{2}{3}a$。反之，满足 $b \times \frac{2}{3}a$ 的 a, b 为坐标的点 $P(a, b)$ 在直线 l：$y=\frac{2}{3}x$ 的上方。从而满足

$y > \frac{2}{3}x$ 的点的集合

$$D^* = \{(x, y) \mid y > \frac{2}{3}x\}$$

象图38那样，它表示在直线 l：$y=\frac{2}{3}x$ 的上方的作为部分平面的开半平面。

直线把平面剖分为两个部分的事实在前面已经说过，由直线剖分的平面的这两个部分叫作**半平面**，但所谓开半平面

的开字意味着不含有作为边界直线上的点。而如果包含边界直线上的点时，则叫作闭半平面。图39的 $D^+=\{(x, y) \mid y\geqslant 0\}$ 表示由 x 轴以及 x 轴上方的点所构成的闭半平面。

平面上一个确定的部分叫作区域，象上面 D^* 那样，对于相同的 x 坐标，具有比直线 l：$y=\frac{2}{3}x$ 大的 y 坐标的点的集合构成的部分叫作直线 l 的正区域，$D_*=\{(x, y) \mid y<\frac{2}{3}x\}$ 叫作 l 的负区域。

即，直线 l：$y=\frac{2}{3}x$ 是把平面分为正区域和负区域的边界。

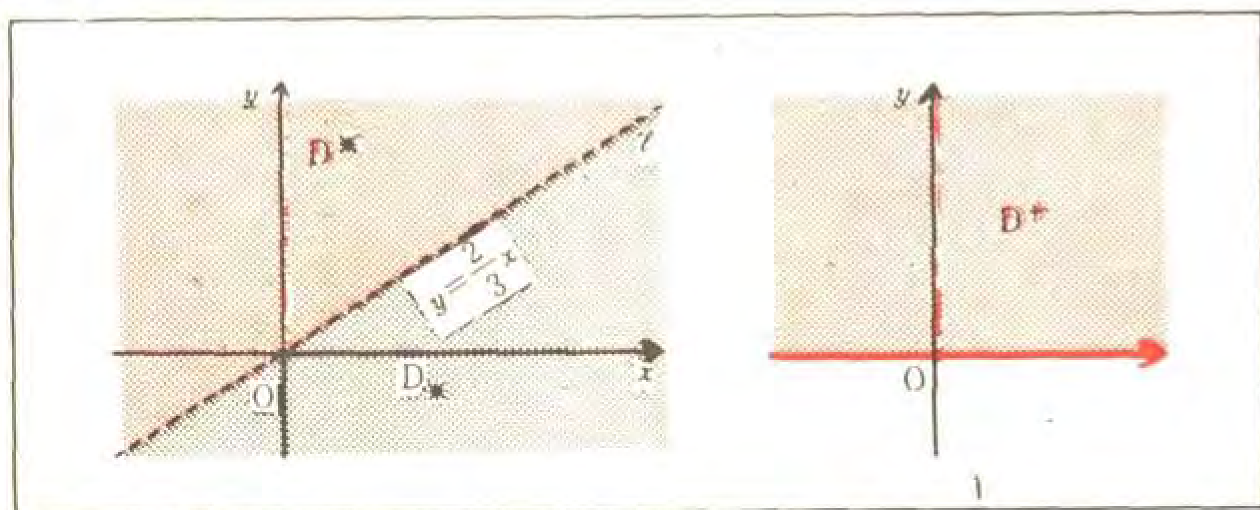


图 38　D^* 是 l 的正区域
D_* 是 l 的负区域

图 39　$D^+=\{(x, y) \mid y\geq 0\}$

〖线性规划的问题〗　在这里，要研究以若干条直线为边界的区域的有关问题。

『在某工厂中生产 **X**，**Y** 两种产品，无论那种产品都必需用两种材料 **A** 和 **B**。生产一个 **X** 需要 **A** 为20公斤；**B** 为10公

斤，生产一个 **Y** 需要 **A** 为10公斤；**B** 为30公斤。但是这个工厂每天只许使用 **A** 为 1000 公斤，**B** 为 1500 公斤。而产品的利润是生产一个 **X** 是 6000日元，生产一个 **Y** 是 9000日元时，试求一天生产的 **X** 和 **Y** 各多少能使总利润最大』

把这个问题的已知事实概括起来列成下表。如果一天生产 x 个 **X**，生产 y 个 **Y**，因为 $x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，而且材料受到限制，它们之间的关系式如(i),(ii),(iii),(iv)。

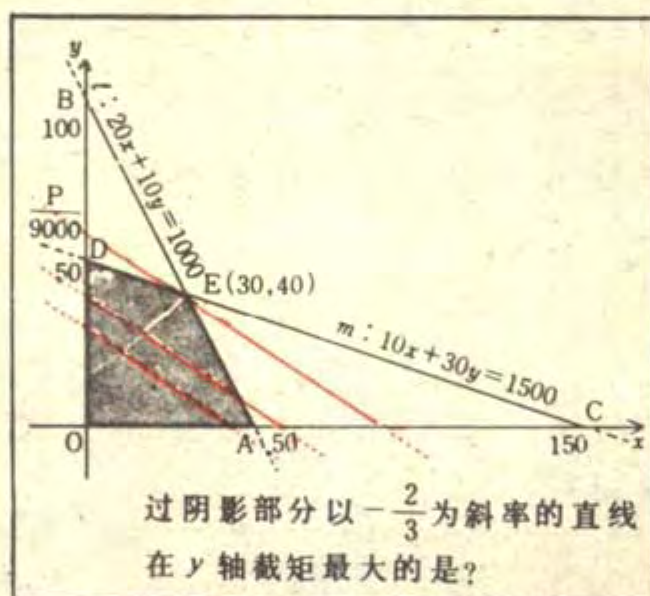


图 40 线性规划问题

产品 / 材料	X	Y	使用量
A	20kg	10kg	1000kg
B	10kg	30kg	1500kg
利润	6000圆	9000圆	

$x \geqslant 0$ ………… (i)

$y \geqslant 0$ ………… (ii)

$20x + 10y \leqslant 1000$ … (iii)

$10x + 30y \leqslant 1500$ …… (iv)

问题是求出同时满足(i),(ii),(iii),(iv)的 x，y，而且使利润

$$P = 6000x + 9000y$$

最大的整数 x，y。

由(i)，$D_1 = \{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ 是 y 轴和 y 轴右侧的点的集合。

由（ii），$D_2=\{(x,y)\mid y\geqslant 0\}$是$x$轴和$x$轴上方的点的集合。

由（iii），$D_3=\{(x,y)\mid 20x+10y\leqslant 1000\}$是直线$l$：$20x+10y=1000$和它下方的点的集合。

由（iv），$D_4=\{(x,y)\mid 10x+30y\leqslant 1500\}$是直线$m$：$10x+30y=1500$和它下方的点的集合。

那么，同时满足联立不等式（i），（ii），（iii），（iv）的x，y为坐标的点(x,y)的集合，都必须包含在四个集合的任何一个当中，就是求这四个集合的公共部分（交集）$D_1\cap D_2\cap D_3\cap D_4$（图40的四边形的涂黑部分）。

这时，可由直线l：$20x+10y=1000$和直线m：$10x+30y=1500$与坐标轴的交点以及l与m的交点，知道共同部分的顶点为$O(0,0)$，$A(50,0)$，$E(30,40)$，$D(0,50)$。

而利润的关系式$P=6000x+9000y$可以看作是x，y的一次方程，它的图象是直线，把这个式子改写为

$$y=-\frac{6000}{9000}x+\frac{P}{9000}$$

或者

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{P}{9000},$$

这个直线的斜率为$-\frac{2}{3}$，在y轴上的截距为$\frac{P}{9000}$的直线。为

了求出同时满足四个不等式（i），（ii），（iii），（iv）的 x，y 而且使利润 **P** 最大，只须求出通过共同部分 $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2 \cap \mathbf{D}_3 \cap \mathbf{D}_4$ 而且斜率为 $-\frac{2}{3}$ 的直线中在 y 轴上的截距 $\frac{\mathbf{P}}{9000}$ 最大即可（这时 **P** 就最大），因为这条直线过点 **E**（30，40），所以 $x=30$，$y=40$ 就是所求的个数。

到现在为止，通过2，3个例子可以看到，以满足一次不等式或一些联立一次不等式的 x，y 为坐标的点 **P**（x，y）的集合，构成半平面或半平面的公共部分的多边形区域。

这些区域，从直观上看它不是凹的，其中任意两点所连接线段常包含在这个区域内，这样的区域叫作**凸集**或**凸区域**。

包括其内侧在内的三角形，矩形，圆以及椭圆的区域都是凸集的例子。

象上面的工厂问题的例子那样，在满足一些一次不等式的范围内求某一次式（线性函数）的最大或最小值的问题叫作**线性规划的问题**。线性规划作为实际问题，在工厂，社会以及各个部门常被使用。要注意凸集合的**顶点**常被取作这样线性规划中一次式（线性函数）的最大或最小值。

§5　圆

如第10页的图19所表示的，直圆锥用平面来截，其截口

所表示的曲线叫作圆锥曲线或二次曲线。

在下面要讨论其中的圆和它的方程。

(1) 圆的方程

〖圆的方程〗 圆可以看作是与一定点具有一定距离的点的集合。这时，把定点叫作圆的圆心，定距离叫作这个圆的半径。

如图41，设以原点O为圆心，半径为2的圆c，若圆c上的任意点为P(x, y)时，因为OP＝2，所以

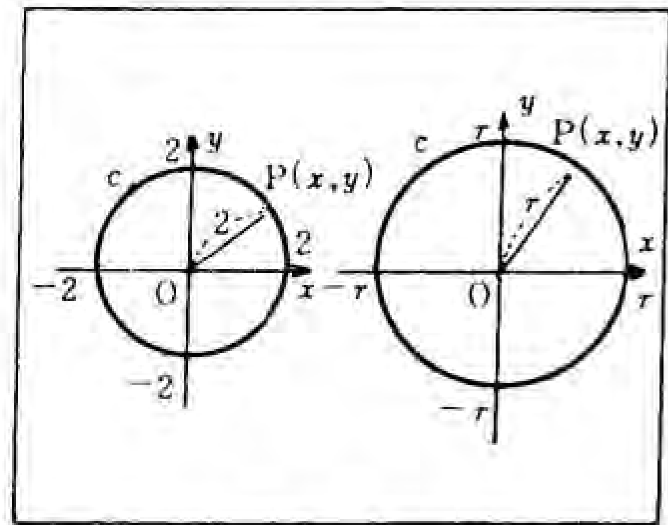


图41 圆 $x^2+y^2=2^2$　图42 圆 $x^2+y^2=r^2$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=2$$

即 $\sqrt{x^2+y^2}=2$

将这个式子两边平方得

$$x^2+y^2=2^2 \cdots(\text{i})$$

圆c上任何点P(x, y)的坐标x, y都满足(i),反之,满足(i)的x, y为坐标的点P(x, y)与原点O的距离都等于2，因此，可以说(i)是圆c的方程。

从上面事实可知,一般地以原点O为圆心,以r($r>0$)为半径的**圆的方程**用下面(ii)式来表示（图42)。

$$x^2+y^2=r^2。 \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

在下面求以点**A**(2，1)为圆心，半径为3的圆 c (图43)的方程。

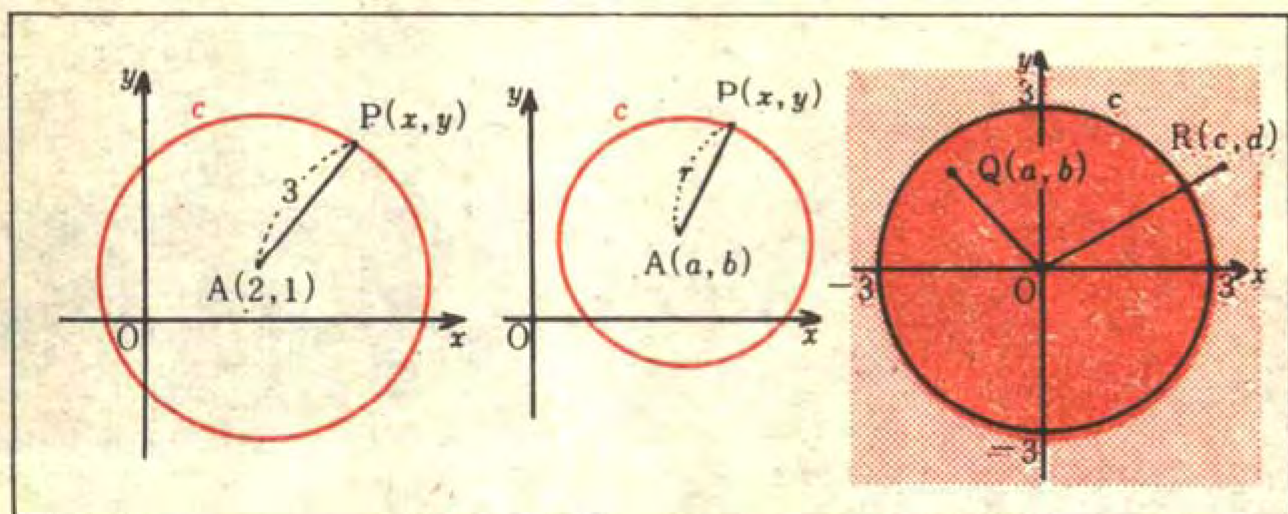


图43 $(x-2)^2+(y-1)^2=3^2$　图44 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　图45 圆 c：$x^2+y^2=3^2$ 的内侧与外侧

设这个圆 c 上任意点为 **P** $(x,\ y)$ 因为 **AP** $=3$，所以

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=3$$

将上式两边平方，去掉$\sqrt{\ }$则得

$$(x-2)^2+(y-1)^2=3^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}$$

(iii) 是以**A**(2，1)为圆心，以3为半径的圆 c 的方程。

一般地，以点**A** $(a,\ b)$ 为圆心，以 r $(r>0)$ 为半径的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

在这里，将 (iii) 的平方项展开，去掉括弧则得

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}'$$

同样，去掉 (iv) 的括弧，则得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \cdots\cdots \text{(vi)}'。$$

到现在为止，从所列举的圆的方程（i），(ii)，(iii)′，(iv)′中，值得注意的是圆的方程是否存在一些共同的特征？

作为圆的方程的特征是

- 是 x，y 的二次方程，
- x^2 和 y^2 项的系数相同，
- 无 xy 项。

〖圆的内侧与外侧〗 现在，考虑象图45那样的以原点 **O** 为圆心，以3为半径的圆 **C**，这个圆 **C** 的方程为

$$x^2+y^2=3^2。$$

现在，在这个圆 c 的内侧任取一点 **Q**（a，b）时，**OQ** <3，从而 $\mathbf{OQ}^2<3^2$，所以 $a^2+b^2<3^2$。反之，如果有 $a^2+b^2<3^2$ 的点 **Q**（a，b），则必是 **OQ** <3，可知它在圆 c 的内侧，所以圆 c 的内侧可以用 $\{(x, y)\mid x^2+y^2<3^2\}$ 来表示。

同理，取这个圆 c 的外侧的点 **R**（c，d），则 **OR** >3，从而由 $\mathbf{OR}^2>3^2$ 得 $c^2+d^2>3^2$，所以圆 c 的外侧可以用 $\{(x, y)\mid x^2+y^2>3^2\}$ 表示。

直线把平面剖分为两个部分，圆也把平面剖分为两个部分，它的边界是圆周。象圆周那样，**从某点出发，中途自身并不相交而再回到出发点的这种曲线**（这种曲线叫作单一曲线）把平面剖分成两个部分，这种性质是很重要的。

（2） 圆与直线的交点

关于圆与直线的交点，利用它们的方程来研究。

如图46，设有以点 A（3，0）为圆心，以 4 为半径的圆 c。试求这个圆 c 与直线 l： $y=2$ 的交点。因为圆 c 的方程为 $(x-3)^2+(y-0)^2=4^2$，即 $(x-3)^2+y^2=4^2$，所以，联立方程，

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=4^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

的解就给出圆 c 与直线 l 的交点的坐标。在这里将②代入①，则得

$$(x-3)^2+2^2=4^2,$$

从 $(x-3)^2=4^2-2^2$

即 $(x-3)^2=12$，从而

$$x-3=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$$

因此， $x=3+2\sqrt{3}$

和 $x=3-2\sqrt{3}$。

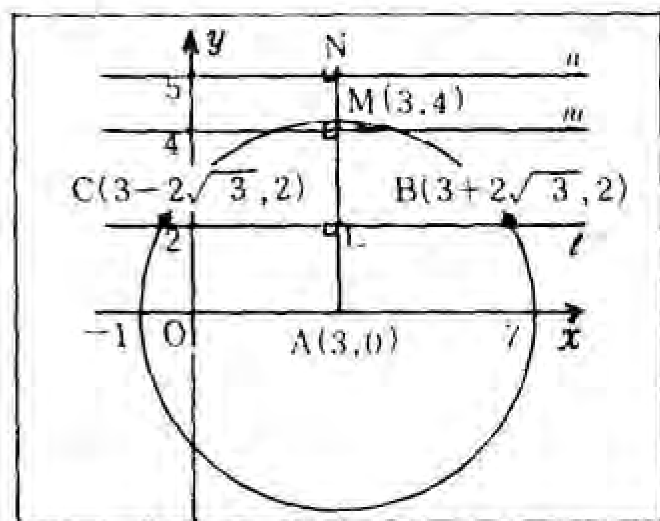


图 46 圆 $c:(x-3)^2+y^2=4^2$ 与直线的交点

因为 $y=2$，所以交点为 B（$3+2\sqrt{3}$，2）和 C（$3-2\sqrt{3}$，2）两点。

其次，为求圆 c 与直线 m： $y=4$ 的交点，只须求

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=4^2 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③\end{cases}$$

的解就可以，将③代入①计算后得

$(x-3)^2=0$ ……④、从而得 $x=3$，若 $y=4$，圆 c 与直线 m 只交于一点 **M**(3，4)。实际上，这时直线 m 与圆 c 的半径 **AM** 在点 **M** 垂直，因此，m 成为在点 **M** 与圆 c 相切的切线。

那么，圆 c 与直线 n：$y=5$ 的交点如何？交点可通过解联立方程

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=4^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

来求，将⑤代入①进行计算，则得

$$(x-3)^2=-9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

对这个式中的 x 不论代入什么实数，它的左边都不能是负值，因此，无实数可使⑥式成立。换句话说，就是①与⑤无解。

因此，圆 c 与直线 n 不存在交点。

如图46，点 **L**(3，2)因为 $(3-3)^2+2^2<4^2$，所以在圆 c 的内侧。而点 **M**(3，4)，因为 $(3-3)^2+4^2=4^2$，所以在圆周 c 上。点 **N**(3，5)，因为 $(3-3)^2+5^2>4^2$，所以点 **N** 在圆的外侧。而且由 $\mathbf{AL}\perp l$，$\mathbf{AM}\perp m$，$\mathbf{AN}\perp n$ 可知，一般地，设从圆 c 的圆心到一直线的距离为 d 时，可知圆与直线的交点个数是当 $d<r$ 时有两个，当 $d=r$ 时一个，当 $d>r$ 时无交点（0个）。

（3） 圆的切线

图47的圆 $c：x^2+y^2=5^2$，通过点**A**(3，4)。试求圆 c 在点**A**的切线 l 的方程。

因为 l 在点**A**与半径**OA**垂直，则 l 的斜率可通过**OA**的斜率来求出。

因为**OA**的斜率为4/3，所以从62页的事实则得 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$。又因为 l 通过点**A**，所以切线 l 的方程为过点**A**(3，4)且斜率为 $-\frac{3}{4}$ 的直线，即

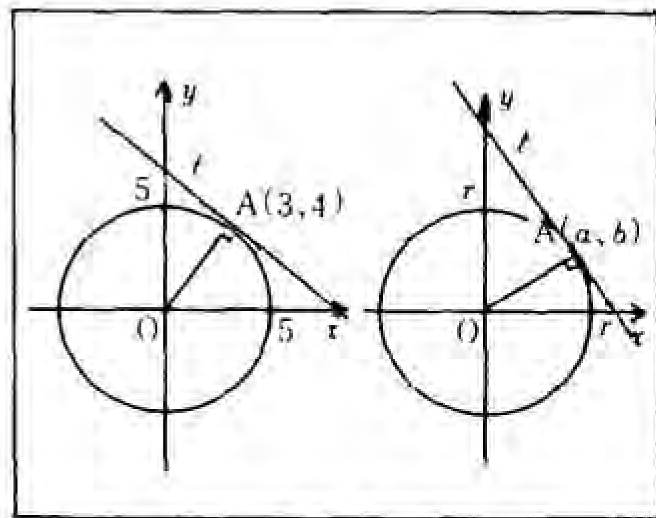


图 47 圆 $c：x^2+y^2=5^2$ 的切线　图 48 圆 $c：x^2+y^2=r^2$ 的切线

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)\quad 即\quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

一般地求在以原点**O**为圆心，半径为 r 的圆 $c：x^2+y^2=r^2$ 上某点**A**$(a，b)$处，圆 c 的切线 l 的方程如下：

在图48中，切线 l 与**OA**垂直，因为**OA**的斜率为 $\frac{b}{a}$，所以 l 的斜率为 $-\frac{a}{b}$，又因为 l 过点**A**$(a，b)$，所以 l 的方程为

$$y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$$

去掉分母得

$$by - b^2 = -ax + a^2$$

即 $$ax + by = a^2 + b^2$$

在这里，因为点 A（a，b）在圆 c 上，即 $a^2 + b^2 = r^2$；从而，**切线 l 的方程为**

$$ax + by = r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

在上面如果 $a = 0$ 和 $b = 0$ 时，切线必须通过其它的方法来求，在这种情形下，它的结果也是方程①的形式。

第Ⅳ章　向量

§1 向　量

（1） 向量

〖向量和它的图示〗 在海上，开始在位置A的船经过一分钟后移动到位置B，这个船的位置变化可以用方向为从A到B的有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示。即，用有向线段$\overrightarrow{AB}$的方向和长度表示位置变化的方向和大小。对于有向线段$\overrightarrow{AB}$，A叫作$\overrightarrow{AB}$的始点，B叫作$\overrightarrow{AB}$的终点。

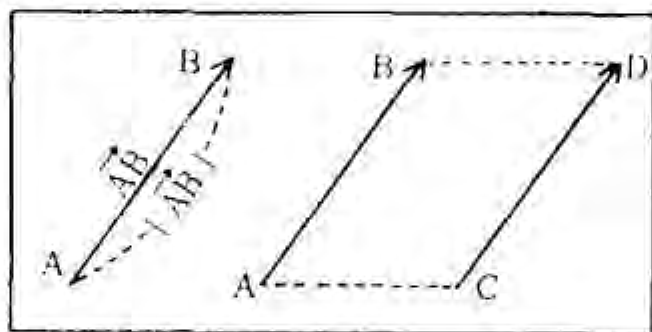


图1 有向线段$\overrightarrow{AB}$　　图2 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

以下，主要叙述平面上的情形。

因为有向线段以哪一点作为始点都可以，所以两个有向线段$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$，只要它们的长度和方向分别相同就叫作相等，用$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$来表示。因此，与$\overrightarrow{AB}$相等的有向线段表示相同向量。把这些有

向线段所表示的向量表示为$\vec{a}$，写作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，叫作向量AB或向量$\vec{a}$。这时，线段AB的长度叫作向量$\overrightarrow{AB}$或向量$\vec{a}$的大小，用$|\overrightarrow{AB}|$或$|\vec{a}|$表示。特别是大小是1的向量叫作单位向量。向量的始点与终点相重时，它的大小为0而成为一点，但是这也是向量的特殊情形，把它叫作零向量用$\vec{0}$来表示。

〖向量的加法·向量的数量倍〗 对于两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，从点A象图3那样取点B，C时，则$\vec{C}=\overrightarrow{AC}$叫作$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，用$\vec{C}=\vec{a}+\vec{b}$表示。不论对任何向量$\vec{a}$都有$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$的关系。

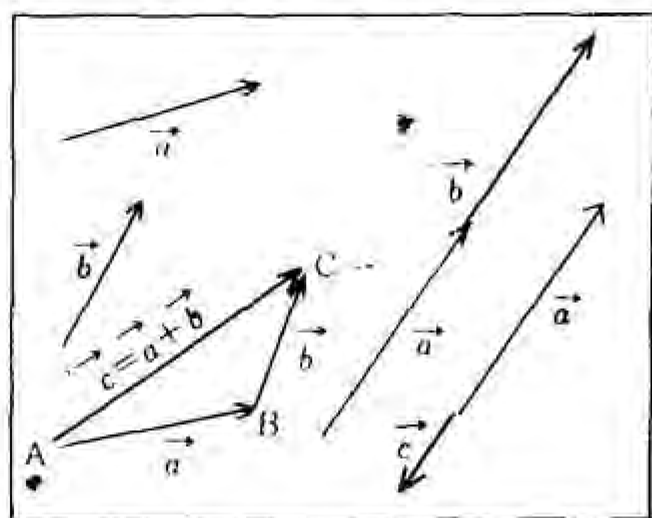


图3 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 图4 $\vec{b}=2\vec{a}$，$\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}$

其次，k是数，当$k>0$时，对于向量$k\vec{a}$，则与$\vec{a}$具有相同方向而大小为它的k倍的向量$\vec{b}$叫作$\vec{a}$的k倍，写作$\vec{b}=k\vec{a}$。与$\vec{a}$的方向相反而大小为它的k倍的向量$\vec{C}$叫作$\vec{a}$的$-k$倍，写作$\vec{C}=-k\vec{a}$。

图4的$\vec{b}$是$2\vec{a}$，$\vec{c}$是$-\frac{1}{2}\vec{a}$。

对任何向量$\vec{a}$，我们规定$0\vec{a}=\vec{0}$，这时，对任意的数k，$k\vec{a}$是有意义的，特别是$(-1)\vec{a}$写作$-\vec{a}$。

又，定义 $\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$。

象上面那样，定义了向量的加法和向量的数量倍，关于

加法和数量倍具有下列性质成立：（以下 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示向量，k m 表示数）

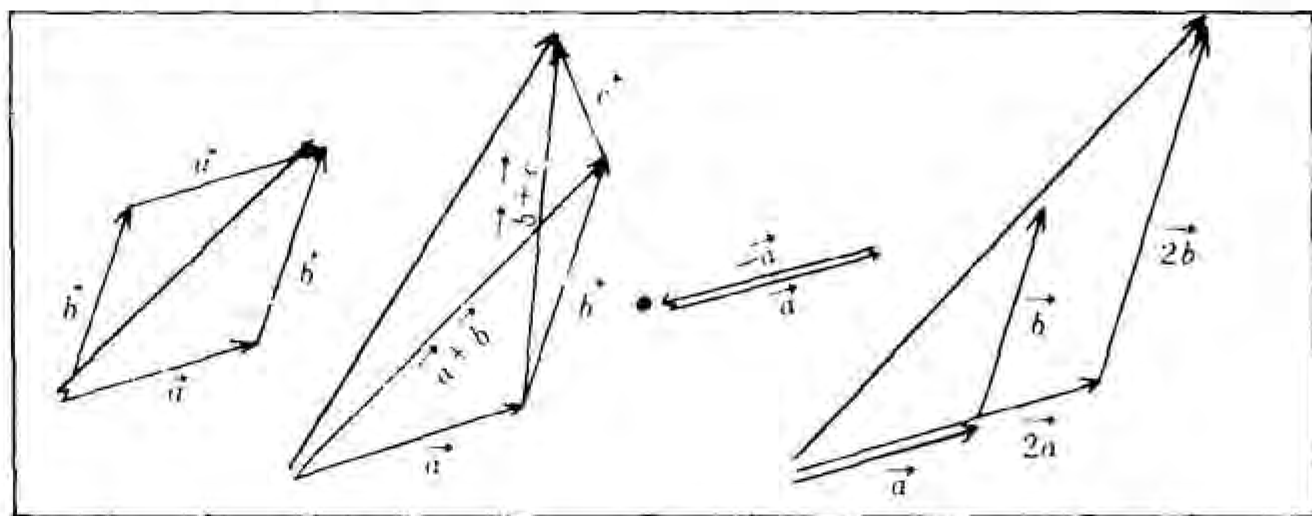


图 5 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　图 6 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　图 7 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$　图 8 $2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

1） $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$（交换律）（图 5）

2） $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（结合律）（图 6）

3） $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4） $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$（图 7）

5） $1\vec{a}=\vec{a}$

6） $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$

7） $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$（图8是 $k=2$ 的情形）

8） $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$

（2） 向量图

〖向量图的性质〗 应用以前的内容，可以导出关于向量的数量倍（伸缩）以及与向量和有关的向量图的一些性质。

象图9那样，已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$和数k,m,n时，则可求得下列向量：

① $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$而且$|\overrightarrow{AB}|:|\overrightarrow{AD}|=1:k$，则$\overrightarrow{AD}=k\vec{a}$

② $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，如果$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{DB}|=m:n$时，

因为$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AB}|=m:m+n$则$\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\vec{a}$

③ 在三角形ABC中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{C}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{c}$

④ 在三角形ABC中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，在BC上的点为D，如果BD∶DC$=m:n$则$\overrightarrow{AD}$

$=\frac{n\vec{c}+m\vec{b}}{m+n}$。

因为由③知$\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{c}$，由②知$\overrightarrow{BD}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{c})$，

又$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{c}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{c})=\frac{n\vec{c}+m\vec{b}}{m+n}$，

特别是，如果这个式子的$m=n$时，则D是BC的中点，而

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$。

⑤ 在三角形ABC中，如果$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$，则$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$因为$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

⑥ 设$\vec{a}$（$\vec{a} \neq \vec{0}$），$\vec{b}$（$\vec{b} \neq \vec{0}$）不平行，如果$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$，则$m = n = 0$。

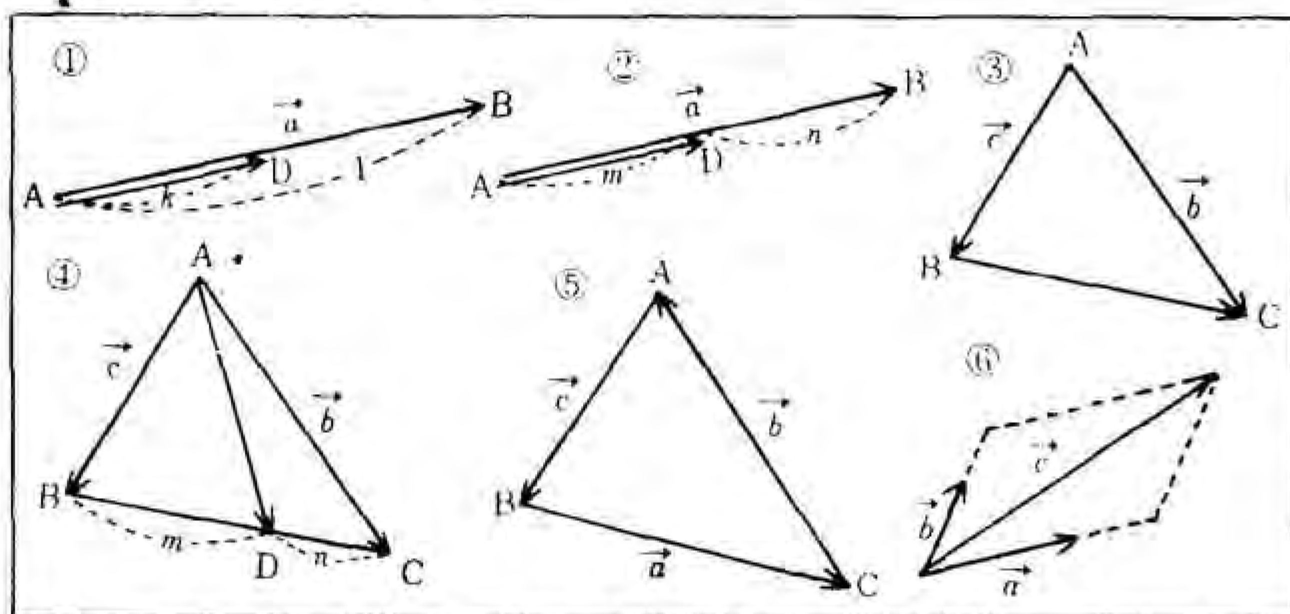


图 9　向量图的性质

这是因为，当$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行时，则对任意向量$\vec{c}$，可以选取适当的数m，n，使$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$成立，$\vec{0}$也可以表示为$\vec{0} = 0\vec{a} + 0\vec{b}$，这时$m = n = 0$。

这是因为，如果$m = 0$，$n \neq 0$，则$m\vec{a} = \vec{0}$，$n\vec{b} \neq \vec{0}$所以$m\vec{a} + n\vec{b} \neq \vec{0}$。关于$m \neq 0$，$n = 0$也同样是由于$m\vec{a} \neq \vec{0}$，$n\vec{b} = \vec{0}$，结果$m\vec{a} + n\vec{b} \neq \vec{0}$。如果$m \neq 0$，$n \neq 0$，则$m\vec{a} \neq \vec{0}$，$n\vec{b} \neq \vec{0}$，因为$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行，不可能$m\vec{a} = -n\vec{b}$，即$m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$不成立，即$m\vec{a} + n\vec{b} \neq \vec{0}$。

在这里给出两个应用向量的例子。

在三角形**A**，**B**，**C**中，设$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$，$\overrightarrow{CA} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AB} = \vec{c}$，这个三角形的重心为**G**。

（i）将$\overrightarrow{AG}$用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$表示出来

（ii） 证明$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{0}$

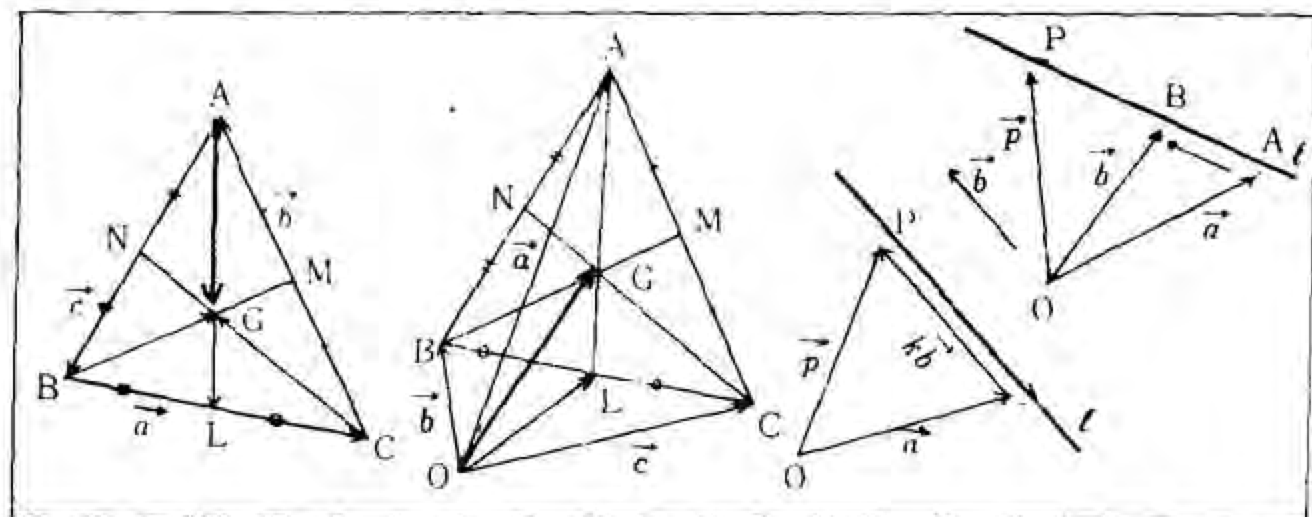


图10 三角形ABC的重心　图11 三角形ABC的重心　图12 与$\vec{b}$平行的直线　图13 过A，B的直线l

如图10，因三角形ABC的重心G，是三条中线AL，BM，CN的交点，而且是从各顶点开始将各中线按2∶1内分的分点。

于是，因为（i）是在$\overrightarrow{AL}$上，$|\overrightarrow{AG}|:|\overrightarrow{GL}|=2:1$，

所以由104页的②可知，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{2+1}\overrightarrow{AL}=\frac{2}{2+1}\cdot\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$

$=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{3}$。

（ii） 由（i）已知$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{3}$，同理$\overrightarrow{BG}=\frac{\vec{a}-\vec{c}}{3}$，

$\overrightarrow{CG}=\frac{\vec{b}-\vec{a}}{3}$。

因此，

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{3}+\frac{\vec{a}-\vec{c}}{3}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{3}=\vec{0}。$$

「设三角形ABC的重心为G时，对任意的点O，试证明

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$。」

由图11可知$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，在$\overrightarrow{AL}$上$|\overrightarrow{AG}|:|\overrightarrow{GL}|=2:1$，所以在三角形AOL中

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OL}}{2+1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OL})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}))=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})。$$

〖**直线的向量方程**〗 在这里，试利用向量来表示直线。求过点A且平行于向量$\vec{b}$的直线l。

如图12，在l上任取一点P，则$\overrightarrow{AP}=k\vec{b}$，如果$k$取各种值，则P在$l$上移动，现在如果取以O为始点的向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，则

$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+k\vec{b}$ …………………… (i)

从而，直线l可表示为$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$。

其次，求过两个点A，B的直线l。

如图13，设在l上任取一点P，设以点O为始点的向量为$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$。与上面作过的一样，因为$\overrightarrow{AP}$

$=k\,\overrightarrow{AB}=k\ (\vec{b}-\vec{a})$,

所以

$$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\,\overrightarrow{AB}=\vec{a}+k\ (\vec{b}-\vec{a})。$$

从而，直线 l 为

$$\vec{p}=\vec{a}+k\ (\vec{b}-\vec{a})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{ii})$$

或者表示为 $\vec{p}=(1-k)\ \vec{a}+k\,\vec{b}$。

§2 向量的分量

(1) 向量的分量

在前面已经说过，在平面上利用不平行的两个向量 $\vec{a}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$，$\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$，对任何向量 $\vec{c}$ 都可以表示成为 $\vec{c}=m\,\vec{a}+n\,\vec{b}$ 形状。这时 m 叫作 $\vec{c}$ 关于 $\vec{a}$ 的**分量**，n 叫作 $\vec{c}$ 关于 $\vec{b}$ **的分量**。

在这里，为使向量的表示与坐标联系起来，因此把向量放在坐标面上来考虑。

在坐标平面上，对于以点 P (p_1, p_2) 为始点，以点 Q (q_1, q_2) 为终点的向量 $\overrightarrow{PQ}$，如果设 $q_1-p_1=a_1$，$q_2-p_2=a_2$ 时，则把 a_1，a_2 的序对 (a_1, a_2) 叫作向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的分量，用 $\overrightarrow{PQ}=(a_1, a_2)$ 表示，a_1 叫作 $\overrightarrow{PQ}$ 的 **X 分量**，a_2 叫作 $\overrightarrow{PQ}$ 的 **Y 分量**。这时，以原点 O 为始点，点 A (a_1, a_2)

为终点的向量为$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}$时，则点**A**的坐标照样是向量$\overrightarrow{a}$的分量，这是很方便的。

这样的以原点为始的向量叫作**位置向量**。利用这个位置向量,因为平面上的点与位置向量一一对应所以是比较方便。

从图14可知，相等向量它们的分量相等，反之，分量相等的向量也相等，所以当$\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$,$\overrightarrow{b}=(b_1, b_2)$时，则$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\rightleftarrows a_1=b_1$，$a_2=b_2$。

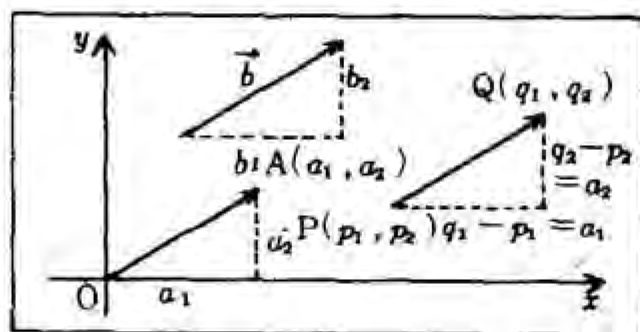


图 14 向量的分量

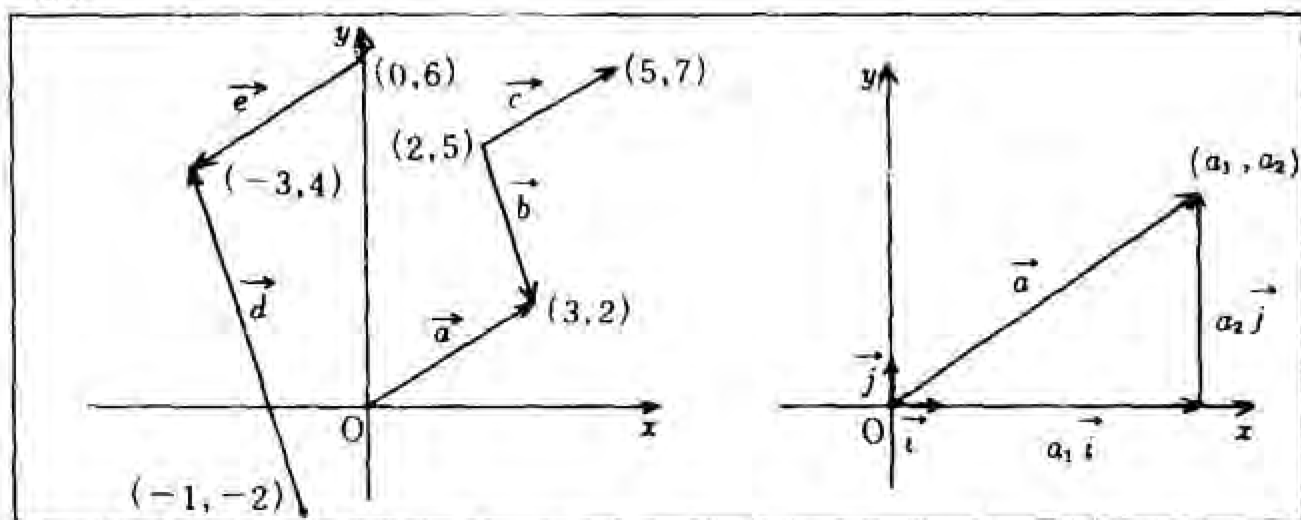


图 15 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{e}$ 的分量为?　　图 16 $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}$

在图15中,因为$\overrightarrow{a}=(3,2)$,$\overrightarrow{c}=(3,2)$,所以$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{c}$。

上面用分量表示向量的方法是象图16那样，在两坐标轴上取单位向量$\overrightarrow{i}$,$\overrightarrow{j}$,则$\overrightarrow{a}=(a_1, a_2)$表示成$\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}$，所以$a_1$，$a_2$分别是$\overrightarrow{a}$对于$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$的分量。因此，就容易理解$a_1$，$a_2$是向量$\overrightarrow{a}$的$x$分量，$y$分量的意义。

(2) 分量表示

〖向量的和、数量倍、大小的分量表示〗 如果$\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$而且k是数，则在§1中所作的向量和，数量倍和大小可用分量表示如下：

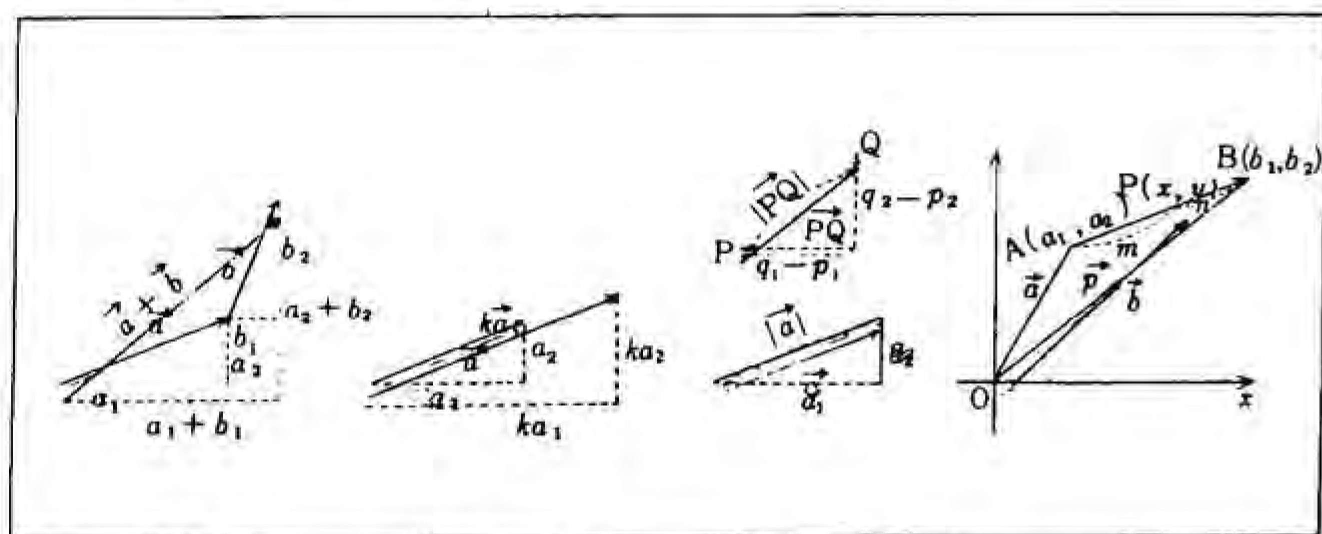


图17 $\vec{a}+\vec{b}$　　图18 $k\vec{a}$　　图19 $|a|$，$|\overrightarrow{PQ}|$　　图20 $\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

$\vec{a}+\vec{b}$：$(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)$（图17）

$k\vec{a}$：$k(a_1, a_2)=(ka_1, ka_2)$（图18）

$|\vec{a}|$：$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$（图19）

特别是，如果$\mathbf{P}(p_1, p_2)$，$\mathbf{Q}(q_1, q_2)$，则$\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_2, q_2-p_2)$，所以$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$（图19）

例如在图15中

$\vec{a}=\vec{c}=(3,2)$，$\vec{b}=(1,-3)$，$\vec{d}=(-2,6)$，$\vec{e}=(-3,-2)$

所以$\vec{a}+\vec{b}=(3+1, 2-3)=(4,-1)$，$\vec{d}=-2(1,-3)=-2\vec{b}$，$\vec{a}=\vec{c}=-\vec{e}$，$|\vec{a}|=|\vec{e}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=|\vec{e}|=\sqrt{13}$。

〖**向量图的分量表示**〗 在前面的第§1中把图形的性质和图形直接用向量给以表示，在这里再利用向量的分量来表示它们，设

$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathbf{OA}}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathbf{OB}}=(b_1,\ b_2)$ 时，则在如图20的$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$上，按$m:n$ 分割$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$的分点为$\mathbf{P}$ (x,y)时，

利用85页④的方法，得到$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{\mathbf{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{a}+m\overrightarrow{b}}{m+n}$。

把它用分量表示时，则得$\overrightarrow{p}=\left(\dfrac{n\,a_1+m\,b_1}{m+n},\ \dfrac{n\,a_2+m\,b_2}{m+n}\right)$。

按53页的坐标来考虑时，也可以得到同样的结果。

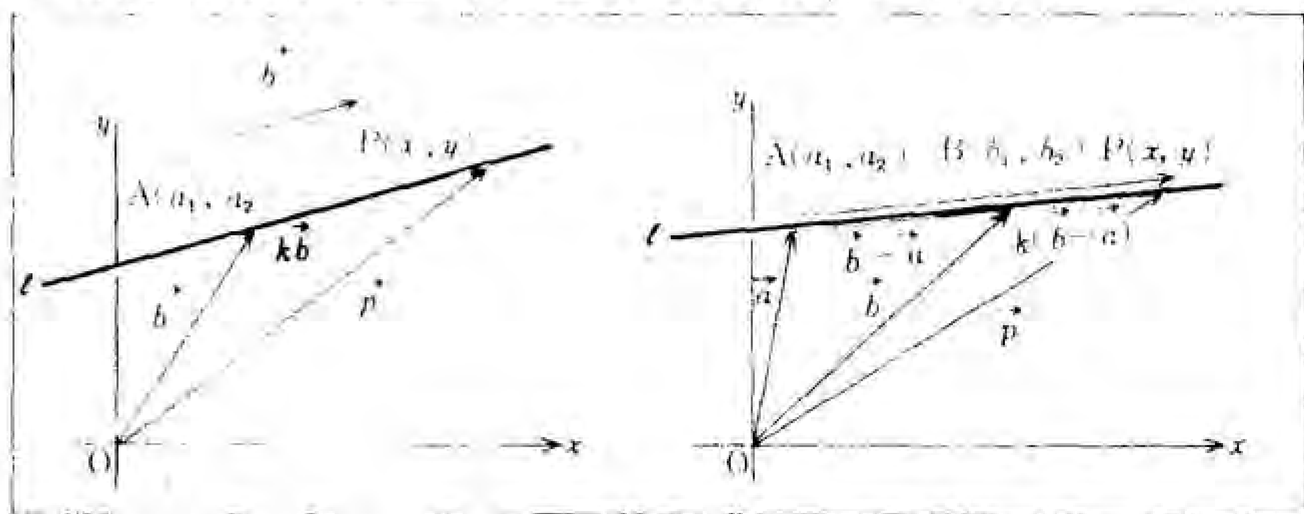


图21 过A且平行于$\overrightarrow{b}$的直线　　　图22 过两点A、B的直线l

过点$\mathbf{A}$ $(a_1,\ a_2)$ 平行于$\overrightarrow{\mathbf{b}}=(b_1,\ b_2)$的直线$l$ 的方程（图21），象189页（i）那样，可写作

$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}$。

因为$\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{p}=(x,\ y)$，所以把$l$ 用向量的分量表示时，则可写作

$(x, y) = (a_1, a_2) + k(b_1, b_2)$。

即 $x = a_1 + k b_1$，$y = a_2 + k b_2$.

从这两个式子消去k，则直线l的方程为

$$\frac{y-a_2}{x-a_1} = \frac{b_2}{b_1} \text{ 或者 } y - a_2 = \frac{b_2}{b_1}(x - a_1)。$$

在这里，因为$\vec{b} = (b_1, b_2)$的斜率$\frac{b_2}{b_1}$，则上式与59页（i X）由坐标所得到的过点A(a_1, a_2)斜率为b_2/b_1的直线方程的结果一样。

其次，通过两点A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2)的直线l的方程，只须把上面情形的$\vec{b}$看作$\overrightarrow{AB}$就可以。由图22，按92页的想法可得l的方程为$\vec{p} = \vec{a} + k(\vec{b} - \vec{a})$。

这里的$\vec{p} = (x, y)$，$\vec{a} = (a_1, a_2)$，$\vec{b} = (b_1, b_2)$所以直线l的方程的分量表示式$(x, y) = (a_1, a_2) + k(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$。

即，$x = a_1 + k(b_1 - a_1)$，$y = a_2 + k(b_2 - a_2)$

从这两个式子消去k，则l的方程如下。

当$a_1 \neq b_1$时，则

$$\frac{y-a_2}{x-a_1} = \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} \text{或者} y - a_2 = \frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x - a_1),$$

当$a_1 = b_1$时，则必$a_2 = b_2$，所以$x = a_1$，它也与56页方程是同样的。

§3 向量的内积

（1） 向量的内积

〖内积〗 到现在为止，还没提及向量本身的大小及向量的夹角等问题。关于与图形的线段长度以及夹角有关的问题，可以通过向量内积给出，所以在这里引入内积的问题。

现在，在平面上的直线l上取两点O，E，使$\overrightarrow{OE}=\vec{e}$为单位向量。

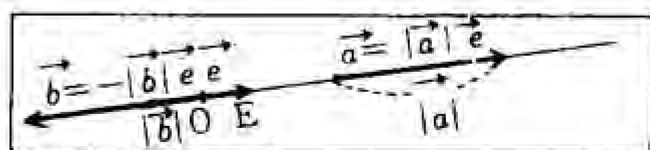


图 23 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}$，$\vec{b}=-|\vec{b}|\vec{e}$

向量$\vec{a}$，$\vec{b}$在l上时，如果$\vec{a}$与$\vec{e}$方向相同，则$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}$，如果$\vec{b}$与$\vec{e}$方向相反，则$\vec{b}=-|\vec{b}|\cdot\vec{e}$。

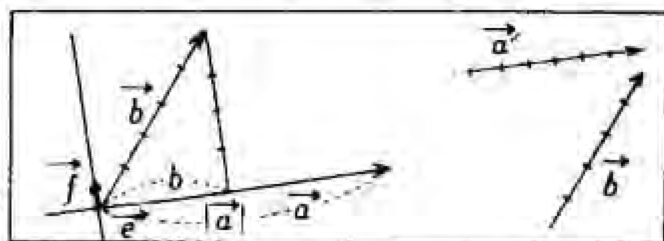


图 24 内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|b_1$

其次，考虑平面上向量沿垂直方向的分解。

对于向量$\vec{a}$，作与$\vec{a}$同方向的单位向量$\vec{e}$和与它垂直方向的单位向量$\vec{f}$。在这里，设向量$\vec{b}$按$\vec{e}$，$\vec{f}$分解为$\vec{b}=b_1\ \vec{e}+b_2\vec{f}$。这时，所谓$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积是$|\vec{a}|$乘以$\vec{b}$在$\vec{e}$上的分量$b_1$，写作$\vec{a}\cdot\vec{b}$。即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|b_1$。
例如在图24中，

$|\vec{a}|=7$，$\vec{b}=3\vec{e}+4\vec{f}$ 所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=7\times3=21$。

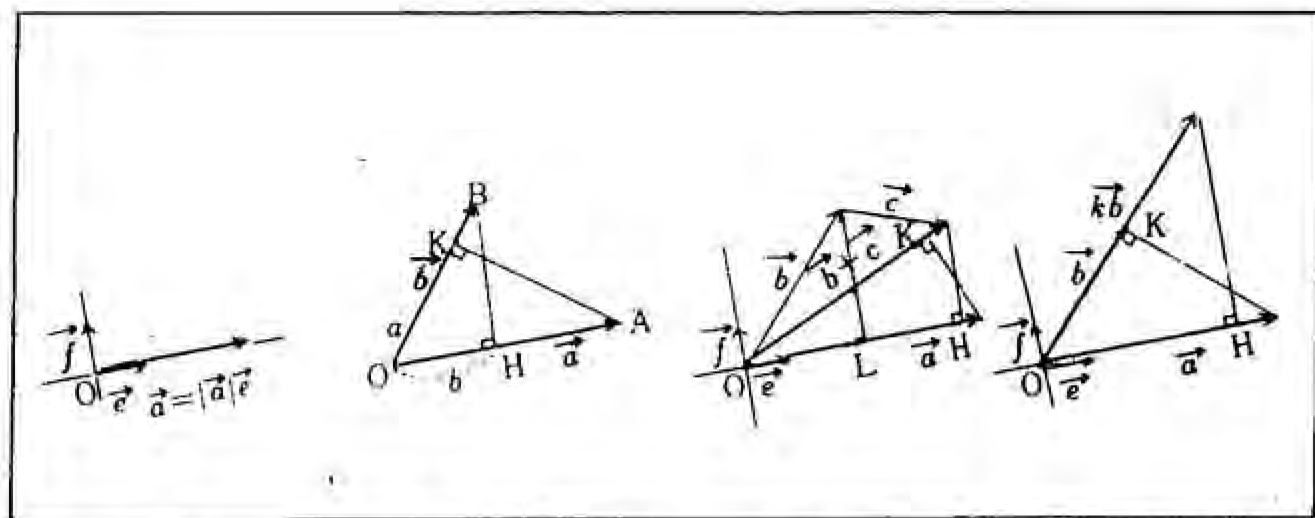


图 25 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　图 26 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　图 27 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　图 28 $\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

〖内积的性质〗 上述的内积具有什么性质？因为$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}$，所以$\vec{a}$与它自身的内积$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|=|\vec{a}|^2$，从而，如果$\vec{a}\neq\vec{0}$，则$\vec{a}\cdot\vec{a}>0$，如果$\vec{a}=\vec{0}$，则$\vec{a}\cdot\vec{a}=0$。

其次证明$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$。

在图26中，因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|b$，$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|a$，由图可知$\triangle AKO\backsim\triangle BHO$所以$OA:OK=OB:OH$，从而由$|\vec{a}|:a=|\vec{b}|:b$得$|\vec{a}|b=|\vec{b}|a$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$。

这个关系对$\angle AOB$是钝角的情形也是成立的。

再证明$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$。

设$\vec{b}$，$\vec{c}$按$\vec{e}$，$\vec{f}$的分解式为$\vec{b}=b_1\vec{e}+b_2\vec{f}$，$\vec{c}=c_1\vec{e}+c_2\vec{f}$，因为$\vec{b}+\vec{c}=(b_1\vec{e}+b_2\vec{f})+(c_1\vec{e}+c_2\vec{f})=(b_1+c_1)\vec{e}+(b_2+c_2)\vec{f}$，而$\vec{b}+\vec{c}$在$\vec{e}$上的分量为$b_1+c_1$，因为

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(b_1+c_1)=|\vec{a}|b_1+|\vec{a}|c_1$，

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|b_1+|\vec{a}|c_1$，所以$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$。

最后证明$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$。

这时，设$\vec{b}=b_1\vec{e}+b_2\vec{f}$，因为$k\vec{b}=kb_1\vec{e}+kb_2\vec{f}$，而$k\vec{b}$在$\vec{e}$上的分量为$kb_1$。从

$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=|\vec{a}|kb_1=k|\vec{a}|b_1$，$k(\vec{a}\cdot\vec{b})=k(|\vec{a}|b_1)=k|\vec{a}|b_1$

从而，$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a},\vec{b})$

把上面已知的结果归纳如下：

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，若$\vec{a}\neq\vec{0}$则$\vec{a}\cdot\vec{a}>0$。若$\vec{a}=\vec{0}$，则$\vec{a}\cdot\vec{a}=0$。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（交换律）

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$（分配律）

$\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

已给$\vec{a}$，$\vec{b}$，如果$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$时，从图26可知$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|b$。在这里，如果$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，因为$b=0$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

反之，如果$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$|\vec{a}|b=0$，当$\vec{a}\neq\vec{0}$则$b=0$，当$\vec{b}\neq\vec{0}$时则$a=0$，因此$\vec{a}$，$\vec{b}$垂直。

即，不为$\vec{0}$的$\vec{a}$，$\vec{b}$垂直的条件是$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

（2） 向量的内积在图形上的表现

以原点O为圆心，r 为半径的圆c，由图29可表示为$|\vec{p}|=r$。因为$|\vec{p}|^2=r^2$，所以可以写作$\vec{p}\cdot\vec{p}=r^2$，把它用

分量写出来就是$x^2+y^2=r^2$。

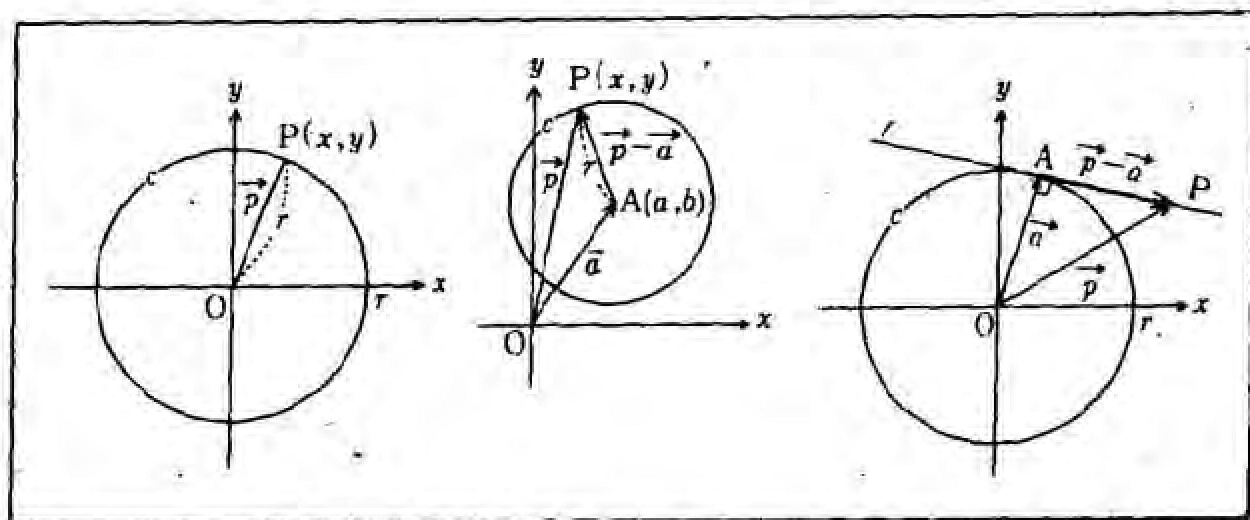


图 29 圆 $c:|\vec{p}|=r$　图 30 圆 $c:|\vec{p}-\vec{a}|=r^2$　图 31 切线 $l:\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$

同理，以点**A**（a_1，a_2）为圆心，r 为半径的圆c 由图30可表示为$|\vec{p}-\vec{a}|=r$ 或（$\vec{p}-\vec{a}$）·（$\vec{p}-\vec{a}$）$=r^2$。把它用分量可表示为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。

其次，考虑以原点为圆心，半径为r 的c 圆上点**A**（x_1，y_1)的切线l。由图31可知$\overrightarrow{\mathbf{AP}}=\overrightarrow{\mathbf{OP}}-\overrightarrow{\mathbf{OA}}=\vec{p}-\vec{a}$，而且因为$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$垂直于$\overrightarrow{\mathbf{AP}}$，所以$\vec{a}$·（$\vec{p}-\vec{a}$）$=0$，这就是切线$l$ 的方程，或者直接地写作

$\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{a}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot\vec{a}$即$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$。

象上面那样，利用向量可以表示图形以及研究图形的性质。而且，向量可用一个文字来表示有向线段，位置向量与空间的点相对应，内积表示垂直问题比较方便等等，总之用向量有很多方便之处。

第Ⅴ章　图形的生成

图形的各作法，从幼年时期以及小学时期就开始学习，例如作粘土手工、植物楷手工、摺纸、摆七巧板、作积木、剪影等等都是与图形有关而令人怀念和制作的喜悦，至今还留有深刻的印象。这些操作，有时是游戏、有时是对图形的学习，也有时是为了作出美丽模型以及有时是在美术或技术设计中来进行的。在这里也考虑图形的各种作法。

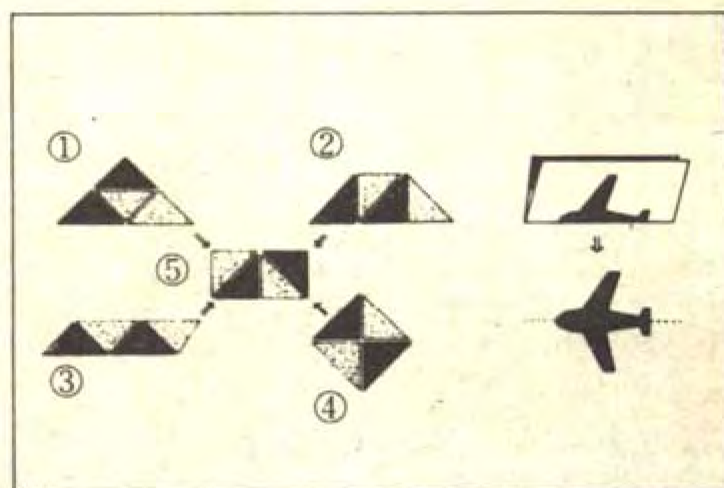


图1　并七巧板　　图2　剪纸

§1　由运动所产生的图形

（1）　移动

不改变图形的形状和大小，只改变其位置的变位叫作**移动**。所谓移动，例如，就是把图形剪成纸片或七巧板上的图形，把它们变动位置而形成的。在平面上图形的移动有下面三种。

将图形沿某方向按规定的距离**滑动**……**平行移动**。

将图形以某一点为中心，按规定的角度**旋转**……**旋转移动**。

将图形以某直线为轴**翻转**……**对称移动**。

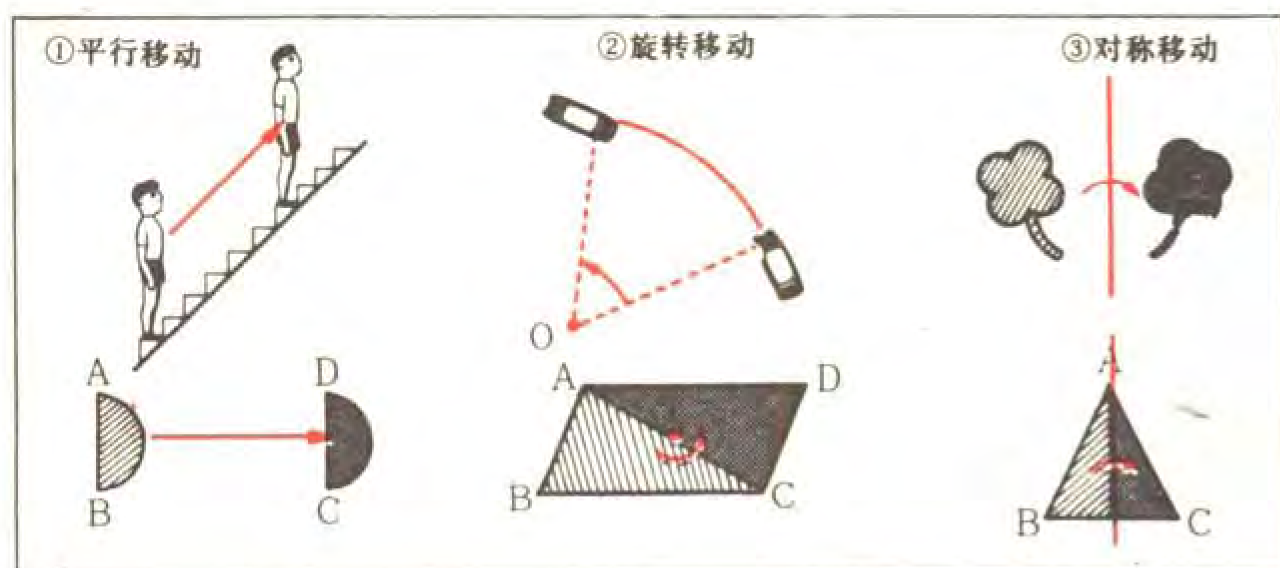


图 3　图形的移动

在前页图1 的七巧板的并合中，我们知道使一种形变为另一种形，它也是把七巧板适当滑动或旋转而达到变形的目的。如图2 中剪纸的飞机的形状，也是关于中央的折痕对称地折叠起来的，对于图3 也是一样。

上面已经述叙了平面上三种图形的移动。那么，在（立体的）空间中图形的移动都有哪些情形？可用在平面上的上

述移动相类似的想法来考虑下列移动。

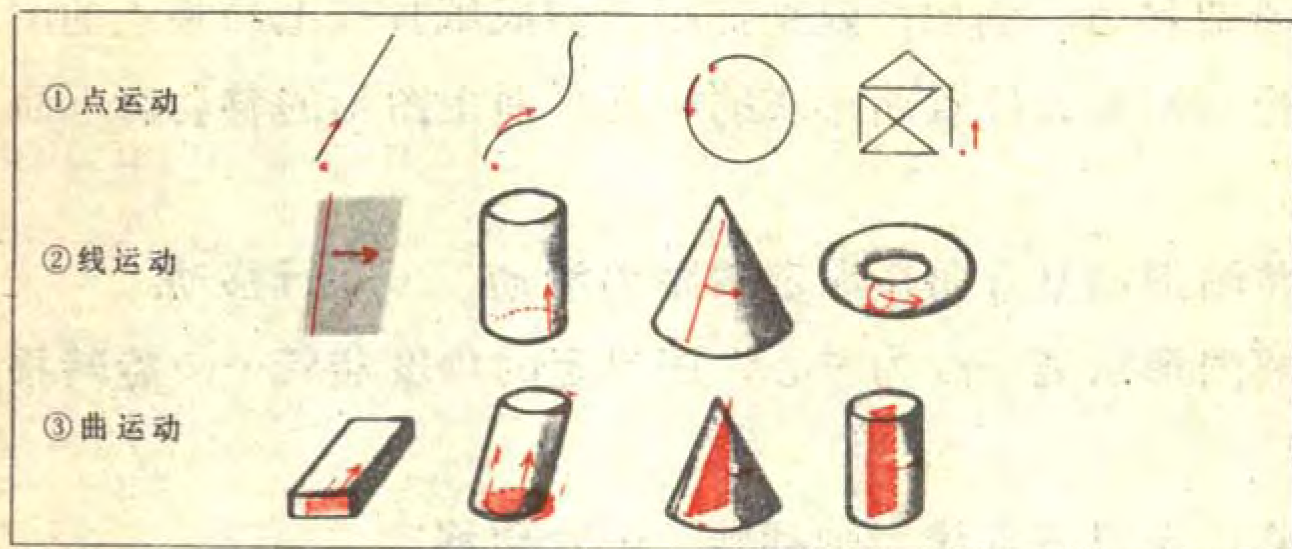


图 4　运动所生成的图形

总之，在空间的移动中也有，平行移动、旋转移动、对称移动。但是对称移动在平面上是关于直线的轴对称移动，在空间有如人们在镜面上看到自己的象那样的关于平面的面对称移动。

（2）　由运动所产生的图形

在上面所说的移动也是，图形F在某种移动下移到F′时，则可以认为是图形F作出新图形F′。

在这里，把移动连续的进行这一事实叫做运动。使某图形运动时，这个图形运动的迹也可以认为它产生了新的图形。

例如，在图 4①中作为点运动后的迹，生成线段、曲线、圆等由线构成的图形。在②中，由线（线段或曲线）运动后的迹形成平行四边形的区域、圆柱面、圆锥面、环面等图形。③

中的面（平面或曲面的局部）运动后的迹生成（包括内部）长方体、圆柱体、圆锥体这样的立体。那个图形是以什么方式的运动而产生的，请再仔细参看图4。

当然正如作为点运动后的迹生成直线，直线运动后的迹生成平面，平面运动后的迹生成（立体的）空间，这样作为运动后的迹所生成的图形也可以无限延展。

从上面的事实可知，一般地点运动生成线，线运动生成面，面的运动生成（立体的）空间。一般地某图形运动后的迹所生成的图形扩展成为比原图形更广阔（维数增高）的图形。

上面的图形的移动以及运动，除前面提到的以外，对空间和图形性质的研究，对图形的证明以及面积、体积的计算等等，它是起着种种重要作用的方法。还应当注意到直线与平面、平面与空间图之间的相似之点，这对于构造新图形、发现新图形也是有用的。

§2 作为点的轨迹的图形

在前面§1中，图形运动后的迹所生成的图形中，一般地由于点运动生成线，即形成由线构成的图形。在这节中，要叙述点在满足某条件下运动的迹所构成的图形以几个作为点的轨迹的图形为典型，给以论述。

（1）轨迹

〖电车的问题〗新干线的电车，如图5 向右行驶，我们乘这个电车即或睡觉了也是向右方行驶。

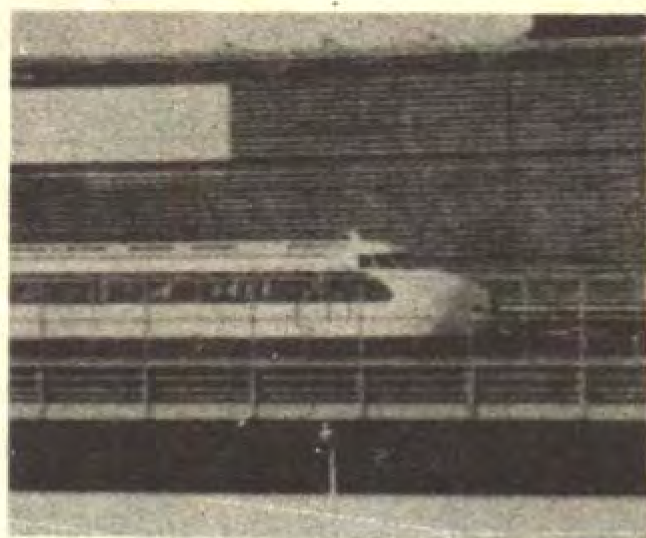


图 5　电车向右行驶时

但是，这个电车不论用什么速度出发行驶，所谓电车的运行方向是向相反的方向——在图上是向左——到原来的位置。这样说是很惊奇吧！真有这样的事实吗？

将圆在一直线上不滑动地向某方向滚动时，看这个圆上的点P 向什么地方运动。如图6 使圆c 在直线 l 上向右方滚动，圆c 上点P 象图中红色曲线那样运动。这个曲线叫做摆线。

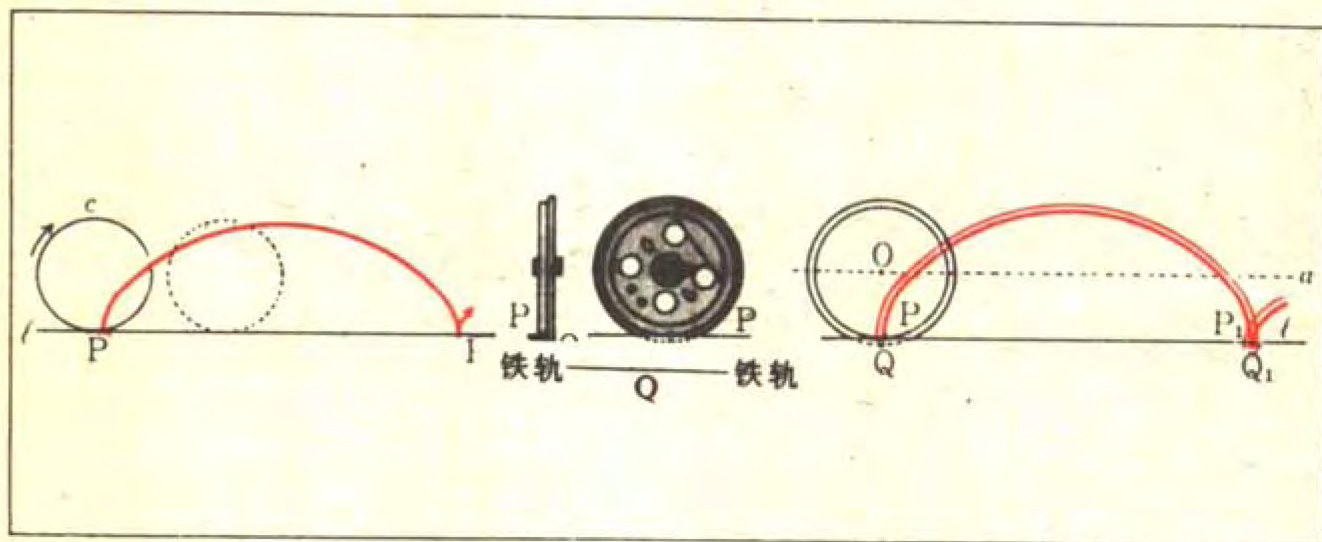


图 6　摆线　　图 7　车轮　　图 8　摆线和高摆线

接前面提出的电车的问题。车轮与铁轨象图7 那样相切于P 。为使车轮不脱轨，因此内侧稍大，考虑这部分上的点Q，Q 象图8 那样与P 点的摆（粗红线）非常相似，只是在接近铁轨处呈卵形曲线（细红线）。象过Q 的这样曲线叫**高摆线**。因此，Q 在临近铁轨处是从后方（这时是左方）返回来。从而说当电车向右行驶时，有从左方返回的地方是可以理解的吧！

〖轨迹〗 由图 8 中车轮的滚动，车轮中心O 到铁轨的距离是一定的（车轮半径长度 r），所以它在与 l 平行的直线 a 上运动。

这个车轮的中心O 象运动后的迹那样，某个点满足某条件时，作为运动后的迹所生成的图形叫作满足此条件的点的**轨迹**。因此，一般地，所谓图形F 是满足某条件A 的点的轨迹时，必满足下列两个条件：

（Ⅰ） 满足条件A 的任意点必在图形F 上，

（Ⅱ） 图形F 上任意点必满足条件A。

这个事实说明，作为轨迹的图形F ，一个不剩地包含满足条件A 的点，而且不包含任何一个不满条件A 的点。

把上面所考虑过作为轨迹F 的平面、直线以及图形都可以看作是**点的集合**，把所说的条件A 看作是对平面 a 上点P 附加的条件A＝c（P），则轨迹F 也可以看作是：

$$F=\{P \mid c(P),\ P\in a\}$$

（2） 作为点的轨迹的直线和圆

满足某条件的点的轨迹的图形中，对最基本的加以研究。

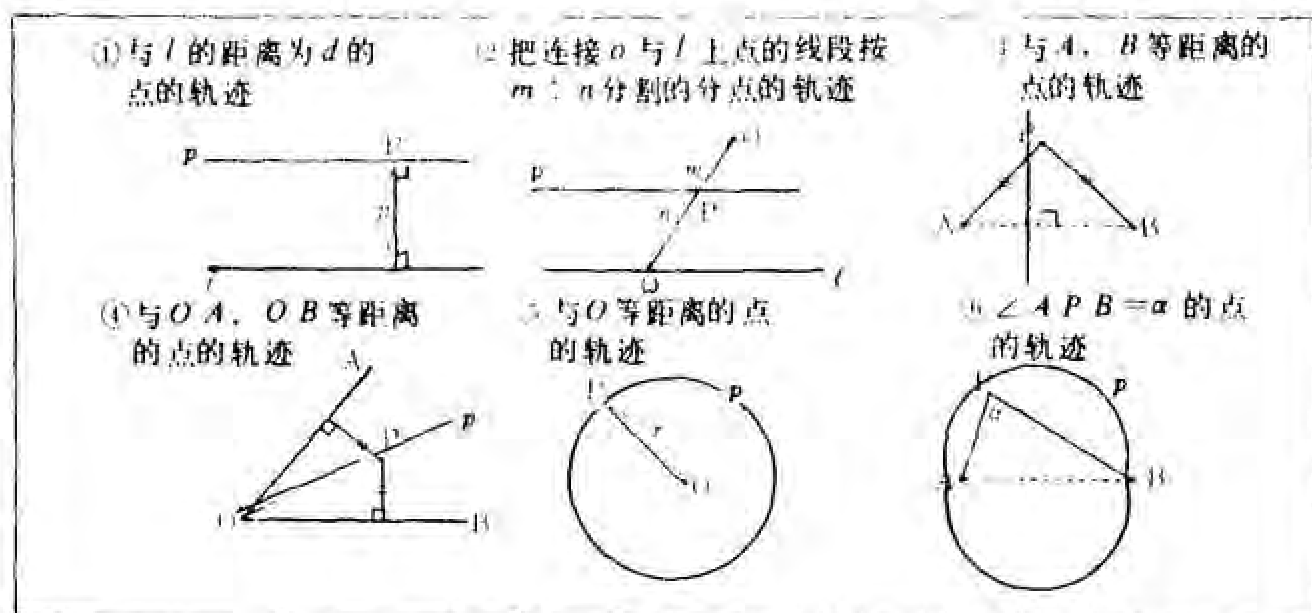


图 9 基本轨迹

〖基本轨迹〗 作为点的轨迹成为直线、圆以及圆弧的几个基本情形可列举出如下：

① 与定直线 l 具有一定距离 d 的点 **P** 的轨迹，是与 l 平行的直线 p（图 9①）。

② 把连接定点O 与定直线 l 上点的线段按 $m:n$ 分割的分点P 的轨迹是与l 平行的直线 P（图 9②）。

③ 与二定 **A**，**B** 有等距离的点 **P** 的轨迹是线段 **AB** 的垂直平分线 p（图9 ③）。

④ 与定角 **AOB** 的二边 **OA**，**OB** 等距离的点 **P** 的轨迹为∠**AOB** 的角平分线 p（图 9④）。

⑤ 与定点 **O** 的距离为定量 r 的点 **P** 的轨迹是以 **O** 为圆

心，以 r 为半径的圆 P（图 9⑤）。

⑥ 以二定点 A，B 为端点的线段AB 的视角的大小为定角（a）的点 P 的轨迹，是以A，B 为两端的圆弧（图 9⑥）。

〖应用轨迹的例子〗 满足某条件而运动的点的轨迹，对图形的证明以及作图是有用的，又对作美丽的图形以及建筑物的设计等实际工作中也常遇到它。

现在有一个中学生在旅行中走一条笔直的小路时，因为

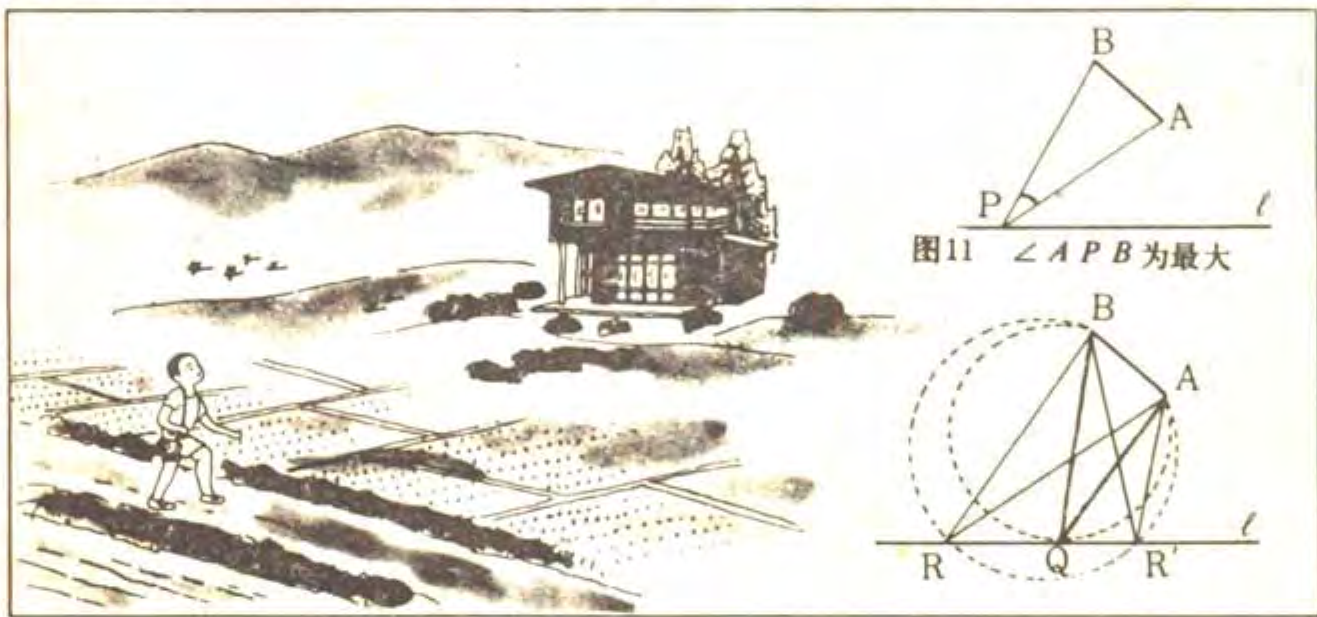


图 10 带照象机旅行的少年　　　图 12 $\angle ARB = \angle AR'B < \angle AQB$

在横的方向有美丽的建筑物，少年想给这个建筑物照象。他想在小路上使被照象的建筑物正面幅度最宽。那么在道路上那个位置拍照最好呢？

如图11那样，设小路为 l，少年的位置为 P，建筑物底面的两角为A，B 时，$\angle APB$ 最大就可以。

因为A，B 是固定的，$\angle APB$ 是有一定大小的 a，使 $\angle APB = a$ 的点 P，由前页⑥知，它是在以A，B 为端点的

圆弧上。因此，这样圆弧中，圆弧与 l 相切的位置为**Q**（通过**A**，**B** 的圆弧与 l 切于**Q**，另外还有一个）时，则在这个点**Q**的位置拍照最好。

因为，象图12那样，考虑与 l 相交于两点**R**，**R′**的圆弧时，**Q**是这个圆弧内侧的点，所以 $\angle ARB = \angle AR'B < \angle AQB$。

（3） 作为点的轨迹的曲线

在102 页中，已经知道电车轮上点的轨迹是摆线。在这里，介绍一些作为点的轨迹的曲线。

〖**抛物线**〗 在函数的图象那里，已经学过由 $y = x^2$，或 $y = -2x^2$ 表示的曲线是抛物线。这个术语是，倾斜抛射一个物体时，该物体运行所通过的曲线叫**抛物线**。

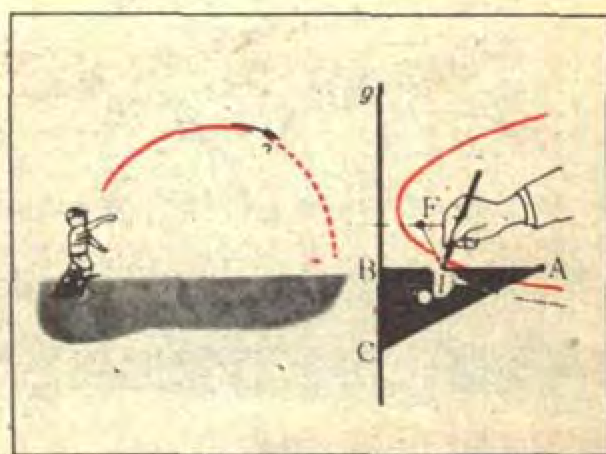


图 13 球的迹　　图 14 抛物线

只用圆规和直尺画不出正确的抛物线，在这里给出一个画法。

如图14，用与直角三角尺**ABC**的边**AB**等长的绳，把这条绳的一端固定在点**A**，另一端固定在点**F**。于是，将铅笔尖拉紧绳且靠住尺边**AB**，这时将尺边**BC**沿定直线 g 滑动时，则此铅笔尖所描出的曲线就是抛物线。

从这个事实可以看出，如果在这条曲线上任取一点**P**时，

则PF＝PB，所以抛物线是与定点F和定直线g的距离相等的点的轨迹。

〖椭圆〗　椭圆和双曲线也是用直尺和圆规不能正确画出的曲线。

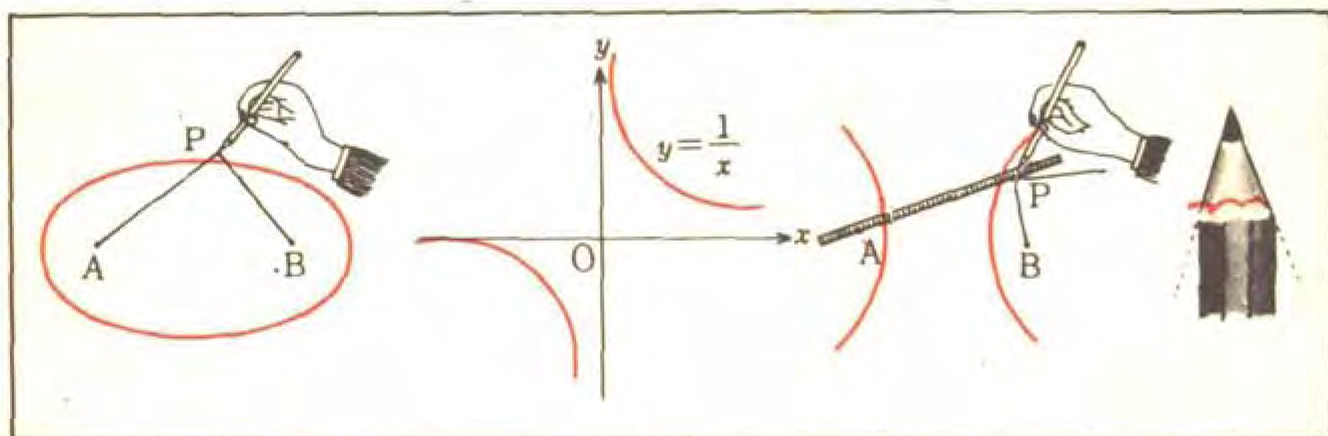


图15　椭圆　　图16　等轴双曲线　　图17　双曲线　　图18　铅笔尖端的双曲线

椭圆的一个画法，如图15那样，确定两点A，B，用比AB长的线绳，把绳两端分别固定在A和B上。然后，用铅笔尖拉紧线绳运动时，它所描出的曲线叫作椭圆。

对于这个曲线上的任意点P，因为常有AP＋PB＝定量（绳长），所以可知椭圆是一动点到二定点距离的和是定量的点的轨迹。

〖双曲线〗　在函数中，已经学过$y=\frac{1}{x}$的图象象（图16）那样的就是（等轴）双曲线。

下面就是双曲线的一种画法。

如图17，确定两点A，B，设有一个象直尺那样薄尺，以

此尺上的一点A为中心旋转。把绳的一端固定在一定点（B），用铅笔尖拉紧线绳且靠薄板边运动，铅笔尖描出的曲线就是双曲线的一支。另一支也可以同样地画出。

从上面的画法可知如果在这条曲线上取任意一点P时，因为常有PA∽AB＝常量，所以双曲线是一动点到两定点距离之差是常量的点的轨迹。前面提到的$y=\frac{1}{x}$图象（图16）是把现在画出的双曲线放在稍倾斜位置的图形。在10页中，已经把双曲线表示为它是直圆锥被倾斜平面相截的截口，所以用铅笔削子削过的铅笔尖部分（图18）也可以看作是双曲线的一部分。

上面论述了作为点的轨迹的图形——抛物线、椭圆、双曲线等等，作为点的轨迹的曲线，此外还有各种很有趣的曲线。

§3　函数的象的图形

（1）　关于图形的函数关系

〖函数〗　如果三角形确定，则它的面积也就随之而确定，如果球确定，则它的体积也就随之确定。如果多边形边数确定，则这个多边形的对角线的条数也就随之确定。一个

圆的圆心角确定，则它所对的弧的长度也随之确定。

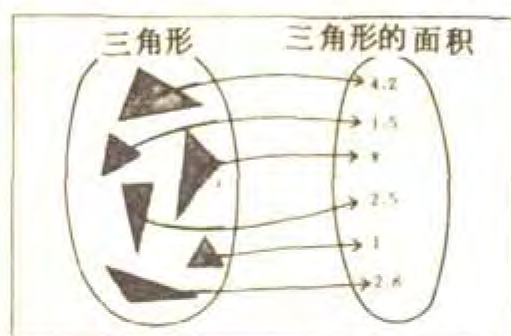


图 19 若三角形确定，则它的面积也随之确定

这样，在图形中若有一方确定时，和它对应的另一方也随之确定的关系是很多的。

如上面说过的“如果三角形确定时，则这个三角形的面积也随之确定”这种情况。因为在平面上有数不尽的三角形，即三角形的集合X，如果确定X的任意一个元素三角形 x，则必有表示 x 的面积的数的集合Y的元素 y，而且只有一个。

一般地有两个集合X，Y，对于X的任意元素 x，有Y的唯一的一个元素 y 与它对应，这个对应 f（或叫对应规则）叫作从X到Y的函数，写作 $f: X \to Y$。又叫作 y 是 x 在 f 下的象，记作 $y=f(x)$。

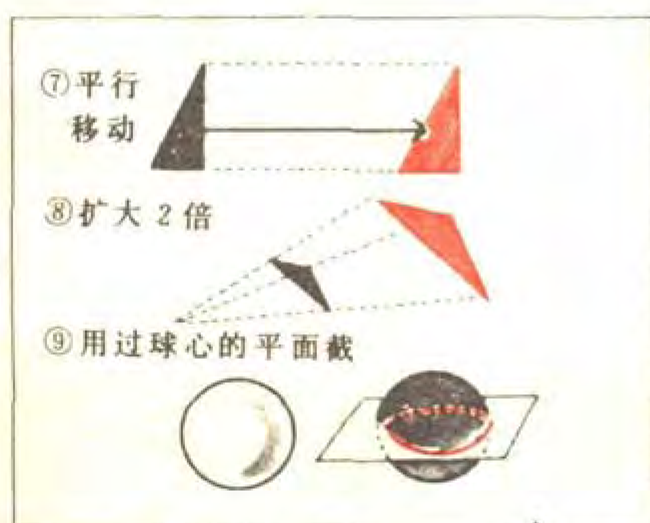


图 20 黑色图形与红色图形之间有函数关系

〖图形中的函数关系〗在图形中，具有函数关系的很多，考虑下列各例。

① 直角三角形的一个锐角的大小（x）与另一个锐角的大小（y）。

② 菱形的一边长度（x）与它的面积（y），

③ 矩形的对角线长度（x）与它的面积（y），

④ 三角形的周长（x）和它的面积（y），

⑤ 圆的周长和它的面积（y），

⑥ 球的半径长度和它的体积（y）。

这些例子中①，⑤，⑥的 x 与 y 有函数关系。

又，如图20所表示的下列的例子如何？

⑦ 三角形和把它向右方平移15 cm的三角形。

⑧ 三角形和把它扩大 2倍的三角形，

⑨ 球和通过它的球心的平面的截口圆。

这里⑦，⑧，⑨都是图形与图形的对应，都有函数关系。红色图形看作是黑色图形的函数（⑦是平行移动15 cm，⑧是扩大 2倍，⑨是过球心的平面的截口）的象。

（2） 由变换所作成的图形

【**变换**】 在§1以及前面（1）中，已经说过，作为一个图形在某移动或运动后的迹，或者是一个图形在某函数下的象，都已经考虑过和它对应的另一个图形。因此举出了它们是从一个图形，或者作为图形集合的元素的各个图形而作出的另一图形的例证。

在这里，把平面以及图形看作点的集合，即**点集**，则可考虑作为从平面到平面，又从图形到图形的函数是平面上的变换。

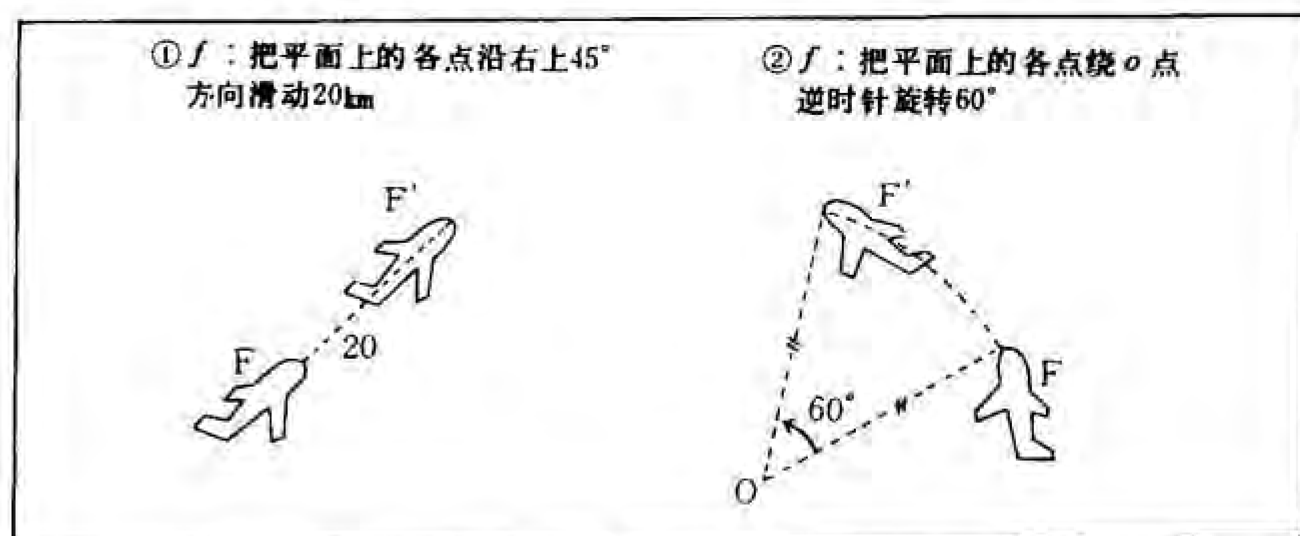


图 21 平面上的变换

例如，象图21那样，考虑从平面X到X的函数f时，X上的所有点都被移动，X上不同二点也被移至不同的二点（f是一一对应）。

一般地，从平面X到X全体的函数f：X→X是一一对应时，则f叫作X上的**变换**（在变换下不变的点叫**不动点**）。因为变换是点与点间的一一对应，所以须注意当运用变换时，必须把平面以及图形看作是点集。

〖**合同变换**〗 在前面§1（1）的三种图形的移动，都是使图形的形状和大小不变的操作，即把图形移动到与它合同的图形的操作。在这里，把这三种移动作为**合同变换**再重新作总括的研究。

今后在使用平行移动、旋转移动、对称移动这个术语时，都是作为变换的意义来使用的。

平面上的合同变换有以下三种：

（i） **平行移动**，象图22那样，把平面上各点沿有向线段$\overrightarrow{AB}$的方向，以AB为距离的平行移动下，把图行F移至图形F′，把F上的任意点P移至F′上的点P′。这时，这个平行移动的对应规则是

$PP' \parallel AB$，$PP' = AB$（AB；一定）

又对点Q，Q′也是$QQ' \parallel AB$，$QQ' = AB$，

所以四边形PP′Q′Q总是平行四边形。把上面的对应规则用坐标表示时，则得

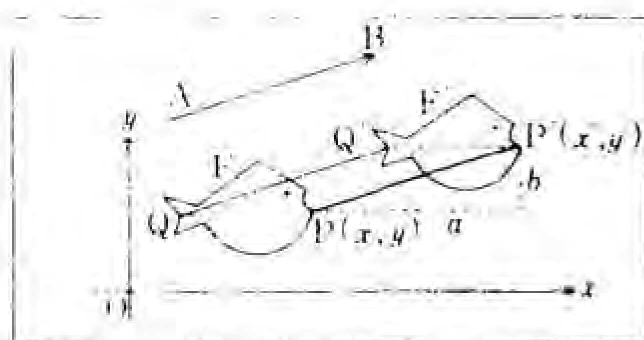


图22 平行移动

$$x' = x + a,\ y' = y + b$$

在图22中，因为$a = 3$，$b = 1$，所以$x' = x + 3$，$y' = y + 1$（将上式与第Ⅳ章§2（2）的向量和的分量表示相比较）。在平行移动下，平面上所有的点都被移动，所以无不动点。

（ii） **旋转移动**。如图32，把平面上的各点，以定点O（在图中已取坐标原点）为中心，绕O旋转定角（θ），由这样点的移动的旋转移动，使图形F移至图形F′，F上的任意点P（x，y）移至F′上的点P′（x'，y'）。

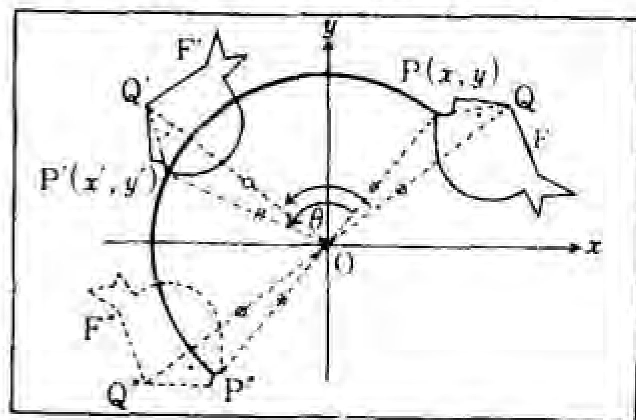


图23 旋转移动

这时，这个旋转移动的对应规则为

$OP=OP'$，$\angle POP'=\theta$ （θ：一定）。

这时，定点O叫作**旋转中心**。

象上面的情形，对点Q，Q'来说，因为$OQ=OQ'$，$\angle QOQ'=\theta$，结果$\triangle POQ\equiv\triangle P'OQ'$，可以说$PQ=P'Q'$。

特别是当$\theta=180°$的情形，如图23的F与F''那样，两个图形关于点O是中心对称的，线段PP''被O平分，这时O是**中心对称的中心**。

在这里提出中心对称这个术语，作为变换来考虑时，中心对称可以看作包括在旋转移动之内，所谓对称移动（在平面上）可在下面的轴对称的意义下使用。

现在，把旋转移动的对应规则（以0为坐标原点时）用坐标表示时，可知它是

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$

例如，$\theta=180°$，对于原点O的中心对称的情形，则$x''=-x$，$y''=-y$。

在旋转移动中，仅旋转中心O是不动点。

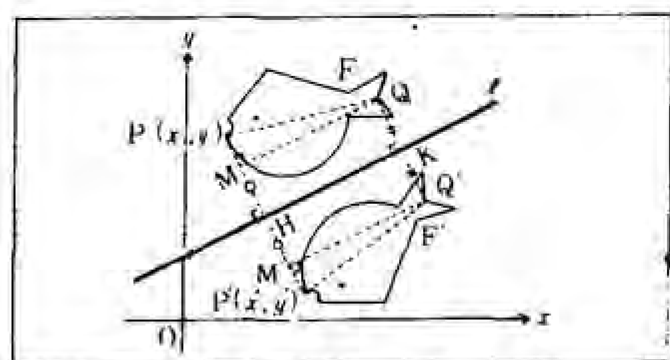


图 24 对称移动

（iii） **对称移动**。如图24，把平面上各点移至关于定直线l的对称点的对称移动，使图形F移至图形F'，使图形上任意点P（x，y）移至图形F'上的任意点P'

(x', y')。这时，这个对称移动的对应规则是

$$PH = P'H, \ PP' \perp l \quad (l：定直线)。$$

(但是，H 是PP'与 l 的交点)。这时，直线 l 叫作**对称轴**。又对于点Q，Q'，因为QK＝Q'K，且QQ'⊥l，所以从图24中的矩形MHKQ≡矩形M'HKQ'，得MQ＝M'Q'，MP（＝HP－HM）＝M'P'（＝HP'－HM'），又∠PMQ＝∠P'M'Q'＝∠R，所以从△PMQ≡△P'M'Q'得到PQ＝P'Q'。

l 在下述的情形下，其对应规则用坐标表示，则为

①l 是 x 轴时，则；②l 是 y 轴时，则；③l 是直线 $y=x$ 时，

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}。\qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}。\qquad \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}。$$

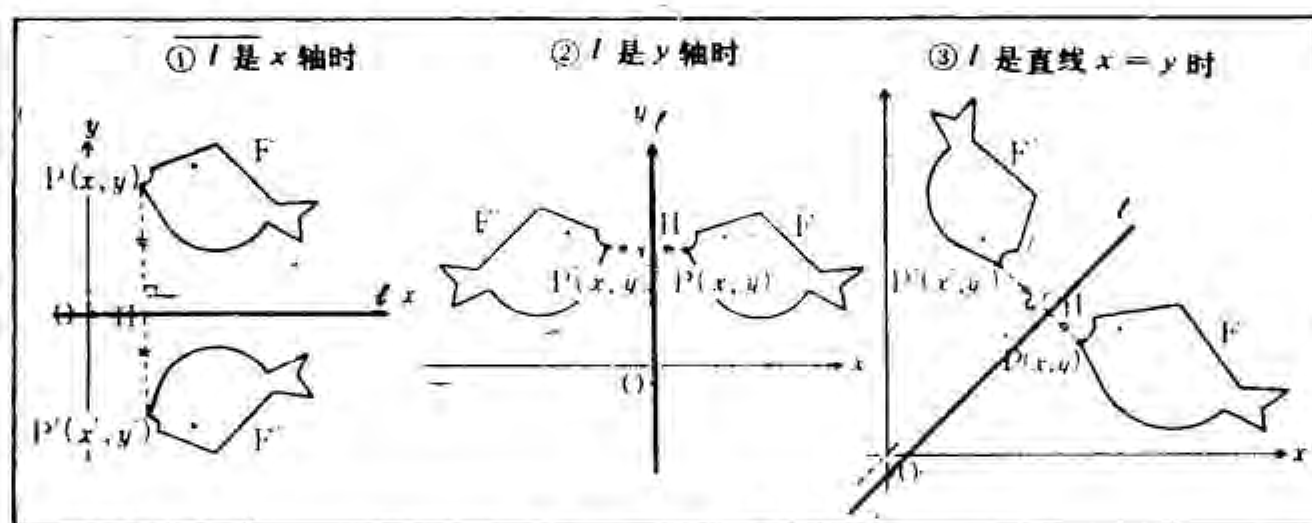


图25 对称移动

在对称移动中，对称轴上的点都是不动点。

从上述情形可知，这三种移动都是使PQ＝P'Q'的，而

对对应点间所连接线段长度不变的变换（三边合同）则可导出在这三种移动下，可使两个对应图形F与F'合同。因此，在开始时，说把这三种移动归纳为合同变换的意义是可以理解的。(实际上，在适当的合同变换下，由移动得到的图形是合同的)。

〖相似变换〗 如图26，把平面上各点，从定点O（在图中取为坐标原点）使距离的比按一定比例（k）扩大（或缩小）的相似变换下，把图形F移至图形F'，使F上任意点P（x、y）移至F'上的点P'（x'，y'）。这时，这个相似变换的规则是：

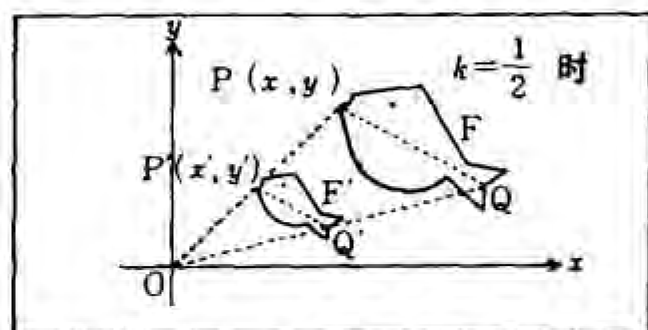


图26 相似变换

O，P，P'在一条直线上，而且OP'$=k\cdot$OP（k：一定)。这时k 叫相似比。

上面的情形，对于点Q和Q'也是O，Q，Q'在同一条直线上，因为OQ'$=k\cdot$OQ，所以△POQ∽△P'OQ'。从而，∠OPQ＝∠OP'Q'，可知PQ∥P'Q'。又，可以说P'Q'$=k\cdot$PQ。

〖其它变换〗 除了上述的合同变换以及相似变换以外，还可以考虑下列的变换。

例如，如图27，还有把图形F的各点（象太阳光线那样）沿平行方向移至对应图形F'的变换。在图27①中，使平行四

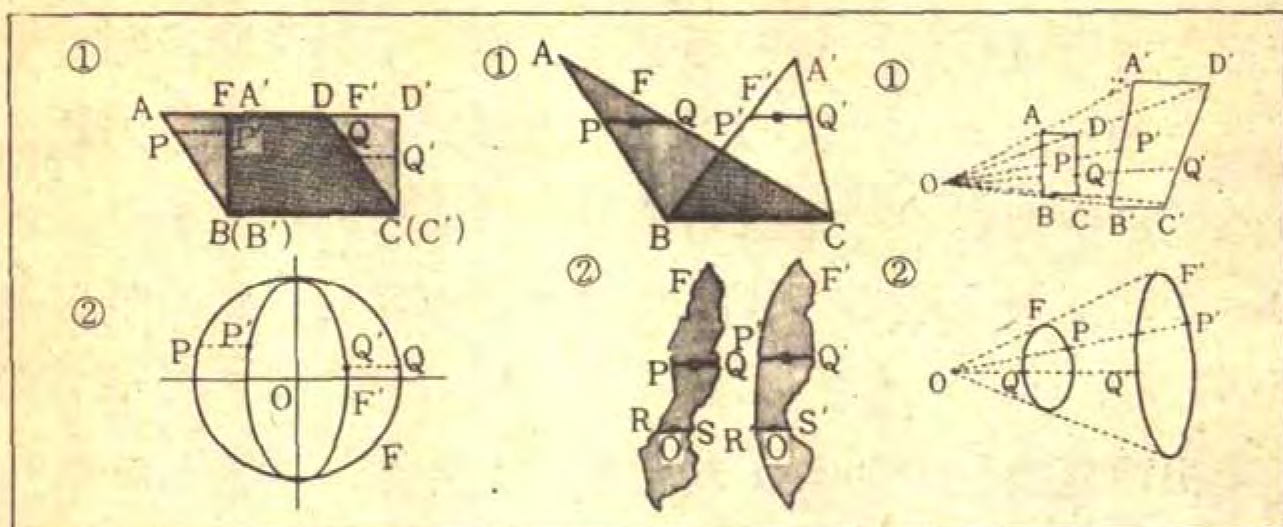


图 27 沿平行方向的变换　　图 28 卡瓦利尔原理　　图 29 沿从一点发出的射线的变换

边形的各点在底边BC上的高度不变的情形下，其各点到BC的距离按比例地沿BC向右平行滑动而成为矩形A'BCD'。从这个事实可知上图的平行四边形ABCD与矩形A'BCD'的面积相等，这样，这种变换对图形的等积变形比较方便。

上面图形的等积变形，象图28那样，一般地，对两个图形F与F'沿某方向以平行直线分割时，如果图形F，F'所截得线段长度，不论在那里截总相等时，则图形F与F'的面积有相等的关系（称之为卡瓦利尔原理）。

又如图27②，圆F的上、下方向不变，仅沿左右方向平行地按一定比例缩小成F'，它成为椭圆。

又如图29，象以很小的灯泡为光源，由光而构成它的影那样，从一点发出的射线使图形F的各点与图形F'的各个点对应。图29②表示圆与椭圆的对应。对于图29①，②的各种情形中，如果对应图形平行时，则这些图形是相似的。

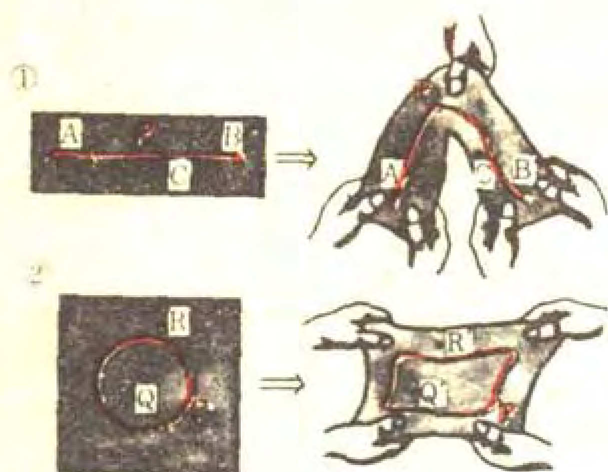


图30　橡皮膜的变形

此外，还有与橡皮膜的变形相仿地拓扑学中所考虑的图形变换（图30）。

以上，以一些平面上图形的变换为主进行了介绍，把图形F在适当地变换的移动下，作出了作为F的象的新图形F'。

图形的变换，除上面已经说过了的以外，对图形性质的研究，利用它作图形的证明和发现新的性质，以及轨迹和作图等方面应用它都是很重要的。

【后记】 这本书，是以空间是什么以及在空间中存在些什么，坐标是什么，对它应当怎样考虑，怎样使用等问题为中心写成的。

并且不仅是方才说过的问题，对数学这门科学，从很久以前，我们的前辈是怎样创建它的，怎样研究它的，直到现在它的现状如何？也都想尽量写的通俗些。

在这本书中，阐述了当遇到困难问题时，前辈们是怎样想出巧妙的方法，用什么办法来解决这个问题的一些情况。

有的人着眼于那些应用问题，对容易问题加以整理，注意类似的问题，对零散的问题加以归纳，对某一个问题加以推广等等，有各种的作法。这些方法大家在学习数学的时候也都适用。希望大家很快地掌握学习方法，爱好数学，愉快的学习数学。

在写这本书时参考了很多参考书，在这里不一一列举，对他们表示谢意。

著　者